МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ СТАВРОПОЛЬСКОГО КРАЯ

Государственное бюджетное образовательное учреждение

«Ставропольский строительный техникум»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

По выполнению практических работ

по дисциплине

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

специальности:

08.02.05 Строители автомобильных дорог и аэродромов.

Ставрополь, 2021

РАССМОТРЕНО
на заседании цикловой комиссии
Естественно-математических
дисциплин
Протокол № 1
«31» августа 2021 г.
Председатель цикловой комиссии
____________ /Н.Б. Берлова/

УТВЕРЖДЕНО
Методическим советом
ГБПОУ ССТ
Протокол № 1
«31» августа 2021 г.

СОГЛАСОВАНО
Л. В. Белоусова,
заместитель директора по УМРК
«31» августа 2021 г.
____

Рецензент:
Л.В. Печалова, методист ЦМКиМР ГБПОУ ССТ.
«31» августа 2021 г.
____

Автор-разработчик:
Т.В. Рыбина,
преподаватель математики ГБПОУ ССТ.
«31» августа 2021 г.
____

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания к практическим занятиям составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины Математика для специальности 08.02.05 Строители автомобильных дорог и аэродромов. Практические занятия занимают важное место при изучении дисциплины Математика. Цель выполнения работ – формирование навыков решения математических задач при помощи различных методов, позволяющих применять полученные знания в профессиональной деятельности. Методические указания включают в себя учебную цель, перечень образовательных результатов, заявленных во ФГОС СПО, задачи, обеспеченность занятия, краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме, вопросы для закрепления теоретического материала, задания для практической работы студентов, решения типовых заданий, критерии оценивания.

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать:

- основные понятия и методы математического анализа, дискретной математики, теории вероятности и математической статистики;
- основные численные методы решения прикладных задач;

уметь:

- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчисления;
- решать простейшие дифференциальные уравнения в частных производных;
- находить значения функций с помощью ряда Маклорена;
- решать простейшие задачи, используя элементы теории вероятности;
- находить функции распределения случайной вероятности;
- находить функции распределения случайной вероятности;
- использовать метод Эйлера для численного решения дифференциальных уравнений;
- использовать метод Эйлера для численного решения дифференциальных уравнений;
- решать обыкновенные дифференциальные уравнения;
- решать простейшие задачи, используя элементы теории вероятности;

Сборник состоит из пояснительной записки, описания практических занятий, которые снабжены общими теоретическими сведениями, контрольными вопросами и заданиями в соответствии с программой и списка рекомендуемой литературы, критерии оценивания.

Сборник практических занятий окажет помощь преподавателям в организации занятий, а также может пригодиться студентам при повторении изученного материала и подготовке к экзамену.

Практическая работа №1

Тема: Вычисление пределов функций с использованием первого и второго замечательного пределов**.** Исследование функций на непрерывность.

Цель: научиться вычислять пределы функций, закрепить понятие первого замечательного предела и научиться вычислять пределы различных функций**.**

При выполнении практической работы студент должен

уметь:

- вычислять несложные пределы элементарных функций;

-устанавливать непрерывность функции;

знать:

- символику и определение предела функции в точке, на бесконечности;

-теоремы о пределах;

-определение непрерывной функции (в точке, на промежутке);

-свойства непрерывных функций;

-иметь представление: об условиях существованиях пределов; о двух замечательных пределах;

Формируемые компетенции:

ОК1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК5.Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить теоретический материал по теме «Функции одной независимой переменной. Пределы. Непрерывность функций».
2. Рассмотреть примеры решения типовых заданий.
3. Ответить на контрольные вопросы.
4. Выполнить самостоятельную работу**.**
5. Сдать отчет по проделанной работе.

Краткие теоретические сведения

Предел функции в точке

Пусть функция y=f(x) задана некоторой окрестности точки x_0 , кроме, быть может, самой точки x_0.

Число A называется пределом функции f(x) при x стремящемся к x_0 (или в точке x_0), если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое положительное число $\delta > 0$ (зависящее от ε, $\delta = \delta(\varepsilon)$), что для всех x, не равных x_0 и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Этот предел функции обозначается $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$

Основные теоремы о пределах.

1. Функция не может иметь более одного предела.
2. Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же сумме пределов этих функций.
3. Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций.
4. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций (при условии, что предел делится не равен нулю).

Первым замечательным пределом называется: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Числом е (вторым замечательным пределом) называется предел числовой последовательности е=$\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 6x - 27}$

Решение.

Для того чтобы можно было применить теорему о пределе дроби надо, чтобы числитель и знаменатель дроби имели конечные пределы и, чтобы предел знаменателя не был равен нулю. В данном случае эта теорема не применима, так как предел знаменателя равен нулю. Но определение предела функции содержит существенную оговорку: при отыскании предела функции f(x) при

$x \to$ а значение f(a) при x=a может не рассматриваться. От функции это определение не требует, чтобы точка x=a входила в область существования функции. Поэтому значение x=a может нами не приниматься во внимание. Именно эти соображения и помогут решить задачу. В нашем случае мы должны считать, что x стремясь к числу -3 никогда не становится равным -3,

а потому значение функции f(x)= $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 6x - 27}$ при x= -3 нас не интересует.

При x=-3 числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль. Мы имеем в

данном случае отношение двух бесконечно малых величин при $x \to 3$, о котором без специального исследования ничего определенного сказать нельзя. Представим квадратные трехчлены, стоящие в числителе и знаменателе, в виде произведения линейных двучленов:

$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$; $x^2-6x-27=(x+3)(x-9)$

тогда $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{x^2-6x-27} = \lim\limits_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-9)} = \lim\limits_{x\to -3}\frac{x-1}{x-9} = \frac{-3-1}{-3-9} = \frac{1}{3}$

Пример 2

Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{x}$

Решение.

Используя первый замечательный предел, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{x}\cdot\frac{1}{\cos 5x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 5x} = \mathbf{5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 5x}} = \mathbf{5\cdot 1\cdot\frac{1}{1} = 5}$$

Пример3

Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+x^2+x+1}{5x^3+4x-17}$.

Решение.

Теорему о пределе дроби применить нельзя, так как пределы числителя и знаменателя бесконечны. Мы имеем дело с отношением двух бесконечно больших величин $x\to\infty$. Об этом отношении, так же как и об отношении двух бесконечно малых величин, ничего определенного без специального исследования сказать нельзя. Для решения задачи числитель и знаменатель дроби разделим на наивысшую степень x, встречающуюся в членах дроби, а после этого перейдем к пределу:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+x^2+x+1}{5x^3+4x-17} = \lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{5+\frac{4}{x^2}-\frac{17}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{\lim\limits_{x\to\infty}(5+\frac{4}{x^2}-\frac{17}{x^3})} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}3+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}5+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{17}{x^3})} = \frac{3+0+0+0}{5+4\cdot 0-17\cdot 0} = \frac{3}{5}$$

Пример 4

Вычислить: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$

Решение.

Когда $x\to 2$ числитель и знаменатель имеют своим пределом нуль, а потому они являются бесконечно малыми величинами при $x\to 2$. Для того чтобы решить вопрос о пределе их отношения умножим числитель и знаменатель дроби на выражение сопряженное числителю, т.е. на $\sqrt{x^2+5}-3$. Будем иметь:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{(\sqrt{x^2+5}+3)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{x^2+5}+3)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}2}{\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{x^2+5}+3)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}2}{\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2+5}+\lim\limits_{x\to 2}3}=$$
$$\frac{4}{\sqrt{2^2+5}+3}=\frac{4}{\sqrt{9}+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Непрерывность функции

Понятие непрерывности функции, так же как и понятие предела, является одним из основных понятий математического анализа.

Определение 1. Функция f(x) называется **непрерывной в точке** x_0, если она удовлетворяет следующим трем условиям: 1) определена в точке x_0 (т.е. существует $f(x_0)$); 2) имеет конечный предел функции при $x \to x_0$ 3) этот предел равен значению функции в точке x_0, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Очевидно, что непрерывность функции в данной точке выражается непрерывностью ее графика при прохождении данной точки (без отрыва карандаша от листа бумаги).

Сформулируем еще одно, второе определение непрерывности.

Дадим аргументу x приращение Δx. Тогда функция y=f(x) получит приращение Δy, определяемое как разность наращенного и исходного значения функции:

$$\triangle y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

Определение 2 Функция y=f(x) называется **непрерывной в точке** x_0, если она определена в этой точке и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\triangle x\to 0}\Delta y = 0.$$

Задания для самостоятельной работы.

Вариант 1

Задание1.Вычислить пределы.

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{-x}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{x}$

Задание 2.Исследуйте функцию на непрерывность: $y=x^2+2$

Вариант 2

Задание 1.Вычислить пределы.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^2+3}{3x^3-5}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x^2+2}{x^3-x+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$

Задание 2.Исследуйте функцию на непрерывность: $y=-x^3-1$

Контрольные вопросы.

1.Дать определение предела функции?

2. Сформулировать основные теоремы о пределах?

3.Сформулировать первый замечательный предел.

4 Сформулировать второй замечательный предел.

Время на выполнение: 90- мин. (час.),
в том числе:
подготовка 10 мин.;
выполнение 1 час.10 мин.;
оформление и сдача 10 мин.

Работа выполняется в тетради для практических работ.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл	вербальный аналог

	(отметка)	
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическая работа №2

Тема: Нахождение производных по алгоритму. Вычисление производной сложных функций.

Цель: отработка навыка использования алгоритма при нахождении производной, вычисления производной сложной функции частных производных.

При выполнении практической работы студент должен

уметь:

-находить производную по определению;

- находить производную с помощью таблицы;

- находить производную сложной функции;

знать:

-знать алгоритм нахождения производной;

-таблицу производных правила дифференцирования;

-понятие сложной функции;

Формируемые компетенции:

ОК 2. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для решения задач профессиональной деятельности;

ОК 5. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ПК 3.3. Участвовать в расчетах технико-экономических показателей строительства автомобильных дорог и аэродромов.

Порядок выполнения работы:

1.Повторить теоретический материал по теме «Производная. Производная сложной функции.».

2.Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

3. Ответить на контрольные вопросы.

4. Выполнить самостоятельную работу**.**

5. Сдать отчет по проделанной работе.

Краткие теоретические сведения

1. Непрерывность функции.

Опр. 2.1. Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке а***, если она имеет предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и этот предел равен значению функции в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Пусть функция y = f(x) определена на промежутке X. Возьмем точку $x \in X$. Дадим значению x приращение $\Delta x \neq 0$, тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Опр. 2.2. ***Производной*** функции y = f(x) называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует):

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Пусть $z = f(x), y = \varphi(x) \Rightarrow z = f(\varphi(x))$ – композиция двух функций.

Т.3.1. Если функция $y = \varphi(x)$ дифференцируема по *x*, а функция $z = f(y)$ дифференцируема по *y*, то сложная функция $z = f(\varphi(x))$ дифференцируема по *x*, причем её производная вычисляется по формуле: $(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$

1 Чтобы найти производную сложной функции, надо ее правильно прочитать;

2 Чтобы правильно прочитать функцию, надо определить в ней порядок действий;

3 Функцию читаем в обратном направлении порядку действий;

4 Производную находим по ходу чтения функции.

2. Дифференциал функции

Дифференциалом функции $y=f(x)$ в точке x называется главная часть ее приращения, равная произведению производной функции на приращение аргумента, и обозначается dy (или $df(x)$):

5 $$\mathbf{dy=f'(x)\bullet\Delta x.} \qquad (1)$$

Дифференциал dy называют также **дифференциалом первого порядка.**

Найдем дифференциал независимой переменной x, т. Е. дифференциал функции y=x.

Так как $y'=x'=1$, то, согласно формуле (1), имеем $dy=dx=\Delta x$, т. Е. дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной: $dx=\Delta x$.

Поэтому формулу (*) можно записать так:

6 $$\mathbf{dy=f'(x)dx,} \qquad (2)$$

иными словами, дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной.

Из формулы (**) следует равенство $\frac{dy}{dx}=f'(x)$.

Теперь производную можно рассматривать как отношение дифференциалов dy и dx.

3.Основные теоремы о дифференциалах

Основные теоремы о дифференциалах легко получить, используя связь дифференциала и производной функции ($dy=f'(x)dx$) и соответствующие теоремы о производных.

Теорема. Дифференциал суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций определяются следующими формулами:

$$d(u+v)=du+dv,$$
$$d(uv)=v\cdot du+u\cdot dv,$$
7 $$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}\quad(v\neq 0).$$

Пример1. Найти дифференциал функции $f(x)=3x^2-\sin(l+2x)$.

Решение: По формуле $dy=f'(x)\,dx$ находим

$dy=(3x^2-\sin(l+2x))'dx=(6x-2\cos(l+2x))dx$.

Пример2. Найти дифференциал функции

$$y=\ln(1+e^{10x})+\sqrt{x^2+1}.$$

Вычислить dy при x=0, dx=0,1.

Решение:

$$dy=(\ln(1+e^{10x})+\sqrt{x^2+1})'\,dx=\left(\frac{10e^{10x}}{1+e^{10x}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx.$$

Подставив x=0 и dx=0.1, получим

$$dy\Big|_{\substack{x=0,\\ dx=0,1}}=\left(\frac{10}{2}+0\right)0,1=0,5.$$

Ответ: 0,5

4.Применение дифференциала к приближенным вычислениям

1) Как уже известно, приращение Δy функции $y=f(x)$ в точке x можно представить в виде $\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$, где $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$, или $\Delta y=dy+\alpha\cdot\Delta x$. Отбрасывая бесконечно малую $\alpha\cdot\Delta x$ более высокого порядка, чем Δx, получаем приближенное равенство

8 $$\Delta y\approx dy, \qquad (3)$$

причем это равенство тем точнее, чем меньше Δx.

Это равенство позволяет с большой точностью вычислить приближенно приращение любой дифференцируемой функции. Дифференциал обычно находится значительно проще, чем приращение функции, поэтому формула (3) широко применяется в вычислительной практике.

Пример 3. Найти приближенное значение приращения функции $y=x^3-2x+1$ при $x=2$ и $\Delta x=0{,}001$.

Решение: Применяем формулу (24.3): $\Delta y \approx dy=(x^3-2x+1)' \cdot \Delta x=(3x^2-2) \cdot \Delta x$.

$$dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0{,}001}} = (3\cdot 4-2)\cdot 0{,}001 = 10\cdot 0{,}001 = 0{,}01.$$

Ответ: 0,01

2) Для вычислений приближенных значений функций используется формула

9 $$\boldsymbol{f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x.} \qquad \textbf{(4)}$$

Пример 4. Вычислить приближенно arctg(1,05).

Решение: Рассмотрим функцию $f(x)=\mathrm{arctg}\,x$. По формуле (4) имеем: $\mathrm{arctg}(x+\Delta x)\approx \mathrm{arctg}\,x+(\mathrm{arctg}\,x)'\cdot\Delta x$, т. Е.

$$\mathrm{arctg}(x+\Delta x)\approx \mathrm{arctg}\,x+\frac{\Delta x}{1+x^2}.$$

Так как $x+\Delta x=1{,}05$, то при $x=1$ и $\Delta x=0{,}05$ получаем:

$$\mathrm{arctg}\,1{,}05\approx \mathrm{arctg}\,1+\frac{0{,}05}{1+1}\approx\frac{\pi}{4}+0{,}025\approx 0{,}810.$$

Ответ: 0,810

Правила дифференцирования

№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции	№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции
I	$(u\pm v)'=u'\pm v'$	**VI**	Производная сложной функции $y=f[u(x)]$, $y'=f'_u\cdot u'_x$
II	$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$	**VII**	Функция задана параметрическими уравнениями $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$, $y'_x=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.
III	$(c\cdot u)'=c\cdot u'$, $c=\mathrm{const}$		
IV	$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$, $(v(x)\neq 0)$	**VIII**	Если $y=f(x)$ и $x=f^{-1}(y)$ — взаимно обратные функции,

V	$\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c\cdot v'}{v^2}$, $c = \text{const}$ $(v(x) \neq 0)$		то $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$, $(y'_x \neq 0)$.

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

№ п п	c=const, x — независимая переменная, $u = u(x)$ — дифференцируемая функция				
1	$C' = 0$	**6**	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	**11**	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$ $(u > 0)$
2	$x' = 1$	**7**	$(\text{tg}\, u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$	**12**	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ $(u > 0)$
3	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$	**8**	$(\text{ctg}\, u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$	**13**	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
4	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	**9**	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $\lvert u \rvert < 1$	**14**	$(\text{arctg}\, u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
5	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	**10**	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $\lvert u \rvert < 1$	**15**	$(\text{arcctg}\, u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

Пример.

1. $((x^2-6x+5)^7)^/ = 7(x^2-6x+5)^6 \cdot (x^2-6x+5)^/ = 7(x^2-6x+5)^6 \cdot (2x-6)$;

2) $(sin^3x)^| = 3 \cdot sin^2x \cdot (sinx)^/ = 3 \cdot sin^2x \cdot cosx$;

3) $\left(\sqrt{2x^3+8x-5}\right)^/ = \frac{1}{2\sqrt{2x^3+8x-5}}(2x^3+8x-5)^/ = \frac{(6x^2+8)}{2\sqrt{2x^3+8x-5}} = \frac{2(3x^2+4)}{2\sqrt{2x^3+8x-5}} = \frac{(3x^2+4)}{\sqrt{2x^3+8x-5}}$;

4) $(\ln(cos3x))^/ = \frac{1}{cos3x}(cos3x)^/ = \frac{-3sin3x}{cos3x} = -3tg3x$;

5) $\left(7^{\sqrt{3x-1}}\right)^/ = 7^{\sqrt{3x-1}} ln7 \left(\sqrt{3x-1}\right)^/ = 7^{\sqrt{3x-1}} ln7 \frac{1}{2\sqrt{3x-1}} \cdot (3x-1)^/ = \frac{3 \cdot 7^{\sqrt{3x-1}} ln7}{2\sqrt{3x-1}}$;

6) $\left(e^{tg\frac{1}{x}}\right)^/ = e^{tg\frac{1}{x}} \cdot \left(tg\,\frac{1}{x}\right)^/ = e^{tg\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{cos^2\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^/ = e^{tg\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{cos^2\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{e^{tg\frac{1}{x}}}{x^2cos^2\frac{1}{x}}$;

7) $\left(arcsin\sqrt{x}\right)^/ = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}} \cdot \left(\sqrt{x}\right)^/ = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$;

8) $(arctgx^2)^/ = \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot (x^2)^/ = \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^4}$;

Частной производной функции нескольких переменных по какой-нибудь переменной в рассматриваемой точке называется производная по этой переменной, считая другие переменные фиксированными (постоянными).

Пример: Найти частные производные функции $z = 2y + e^{x^2-y} + 1$

Решение: $z'_x = 2xe^{x^2-1}$;

$z'_y = 2 + e^{x^2-y}(-1)$

Задания для самостоятельной работы.

Задание 1.Найти производную сложной функции.

Вариант1.	**Вариант 2.**
$A)\ y = (5-2x)^7$; б) $y = \sqrt{3sinx+2}$; в) y=$ln(x^2-4x)$; г) y=$e^{\sqrt{x}} + ln3$; д) y=$\frac{1+sin3x}{1-sin3x}$; е) y=arctg2x.	$A)\ y = (8-3x)^5$; б) $y = \sqrt{2cosx+1}$; в) y=$ln(sin6x)$; г) y=$5^{x^2} + cos\frac{\pi}{12}$; д) y=$\frac{1+\ln(cosx)}{1-\ln(cosx)}$; е) y=arcsin4x.
Найти частные производные первого порядка	
$1) z = x^3 - 4x^2y - y^3$ $2) z = \sqrt{xy} + \ln xy$ $3) z = \cos(2x+y) + \sin(x-y)$ $4) z = e^{2x^2-y^2} + 4x - 5y$ $5) z = arctg(3x-3y)$	$6) z = (2-y)^x$ $7) z = e^y \ln x$ $8) z = xtgy$ $9) z = \sin\frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$ $10) z = \ln(x^2 + xy + y^2)$
Вычислить производную по определению	
$10) y = x^2 + x$	$10) y = x^2 - 5$

Контрольные вопросы

1.Дайте определение производной.
2.Дайте определение дифференциала.
3.Определение сложной функции.
4.Алгоритм нахождения производной сложной функции.

5. Алгоритм нахождения производной функции по определению.

Время на выполнение: 90- мин. (час.),
в том числе:
подготовка 10 мин.;
выполнение 1 час.10 мин.;
оформление и сдача 10 мин.

Работа выполняется в тетради для практических работ.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическая работа №3

Тема: Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование. Замена переменной. Определенный интеграл. Геометрический смысл определенного интеграла.

Цель: закрепление основных понятий неопределенного и определенного интегралов, навыков применения методов интегрирования, применения определенного интеграла.

При выполнении практической работы студент должен

уметь:

-решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

Знать:

-основы интегрального исчисления;

Формируемые компетенции:

ОК1**.** Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 2. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для решения задач профессиональной деятельности;

ПК 3.3. Участвовать в расчетах технико-экономических показателей строительства автомобильных дорог и аэродромов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить теоретический материал по теме «Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. Применение в практических задачах».
2. Рассмотреть примеры решения типовых заданий.
3. Ответить на контрольные вопросы.
4. Выполнить самостоятельную работу**.**
5. Сдать отчет по проделанной работе.

Краткие теоретические сведения.

Определение: Совокупность всех первообразных функций F(x) + c для дифференциала $f(x)dx$ называется **неопределенным интегралом** и обозначается $\int \mathbf{f(x)dx}$**.**

Таким образом,

$$\int \mathbf{f(x)dx = F(x) + c},$$

где $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением, а c- произвольной постоянной интегрирования. Например:

$$\int 2xdx = x^2 + c,$$

так как

$$(x^2 + c)' = 2x.$$

Процесс нахождения первообразной функции называется **интегрированием**.

Интегрирование — это действие, обратное дифференцированию.

2.2. Свойства неопределенного интеграла

1) $d\int f(x)dx = f(x)dx$,

т. Е. дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.

2) $\int dF(x) = F(x) + c$,

т. Е. неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной.

3) $\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$,

где a = const, т. Е. Постоянную величину можно вынести за знак интеграла.

4) $\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\, dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$,

т. Е. Интеграл суммы или разности функций равен сумме или разности интегралов.

Основные интегралы.

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

где $n \neq -1$

3. $\frac{dx}{x} = ln|x| + C$

4. $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\, x + C$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x + C$

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\, \frac{x}{a} + C$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\ \frac{x}{a} + C$

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\ \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\ \left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Примеры:

1.$\int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1)dx = 5\int x^4 dx - 4\int x^3 dx + 3\int x^2\, dx - \int dx = x^5 - x^4 + x^3 - x + C$

2. $\int \frac{2x\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx = 2\int x^{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} dx = 2\cdot\frac{6}{13}\cdot x^{\frac{13}{6}} + C = \frac{12}{13}\cdot x^{\frac{13}{6}} + C$

Определенный интеграл

Приращение F(b) – F(a) любой из первообразных функций F(x) + C при изменении аргумента от x = a до x = b называется **определенным интегралом**, и обозначается:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Таким образом

$$\int_a^b f(x)dx = \text{F(b) – F(a)}$$

a — нижний предел интеграла,

b — верхний предел интеграла.

Для вычисления определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx$$

нужно найти соответствующий неопределенный интеграл, в полученное его выражение подставить вместо x сначала верхний, а затем нижний пределы определенного интеграла и из первого результата подстановки вычесть второй.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = \mathrm{F(b)} - \mathrm{F(a)}$$

Примеры:

1.

$$\int_{-1}^{1} (x^2 + 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3} + 1\right) — \frac{1}{3} - 1 = 2\frac{2}{3}$$

2.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 4cosxdx = 4sinx|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\left(sin\frac{\pi}{2} - sin\frac{\pi}{3}\right) = 4(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

2.8. Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx$

где C = const

2. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx \; = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_3(x)dx$

3.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Пример:

$$\int_0^a (x^2 - ax)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{a}{2}x^2\right)\Big|_0^a = \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} = -\frac{a^3}{6}$$

Пример.Найти площадь S фигуры, заключенной между осью OX и кривой $y = x^2 – 4x$ (рис. 65).

Рассмотрим точки пересечения кривой $y = x^2 – 4x$ с осью OX:

$y = 0$

$x^2 – 4x = 0; x(x – 4) = 0$

$x_1 = 0; x_2 = 4.$

Найдем производную:

$y' = 2x – 4.$

Найдем точки экстремума:

$y' = 0;$

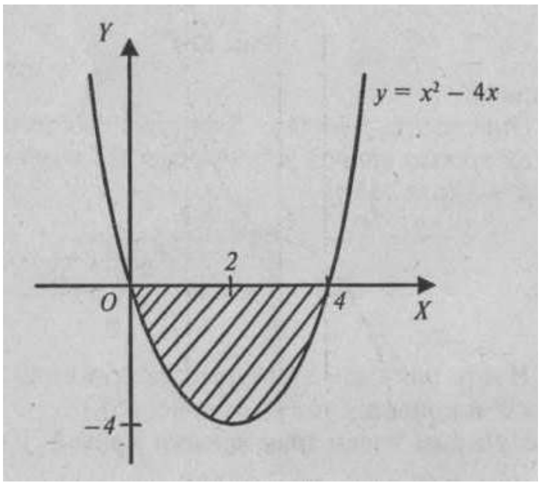


Рис. 1

$2x – 4 = 0$

$x = 2$

y « = 2 > 0

x = 2 – точка min

$y(2) = -4.$

Искомая площадь ограничена сверху OX, снизу $y = x^2 - 4x$, слева $x = 0$, справа $x = 4$.

Так как $y < 0$, то

$$S = \left|\int_0^4 (x^2 - 4x)dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2\right)\right|_0^4 = \left|\frac{64}{3} - 32\right| = \left|21\frac{1}{3} - 32\right| = \left|-10\frac{2}{3}\right| = 10\frac{2}{3}$$

Задания для самостоятельной работы.

Задание№ 1. Найти интегралы

1) $\int \frac{dx}{x^4}$ *2)* $\int \sqrt[3]{x dx}$ *3)* $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

4) $\int \sqrt[3]{3 - x}\, dx$ *5)* $\int \frac{dx}{4x+3}$ *6)* $\int e^{-2x+7} dx$

Задание№ 2. Найти интегралы

1)	$\int (7x^3 - 5x^2 + 3x - 8)dx$	*2)*	$\int \frac{dx}{4x+6}$
3)	$\int \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 5\right)dx$	*4)*	$\int \frac{dx}{x-1}$
5)	$\int (2x-4)^2 dx$	*6)*	$\int 4^{2x} dx$
7)	$\int x^4(x-7)dx$	*8)*	*19)* $\int (e^{2x} + 3x)dx$
9)	$\int (5-3x)^3 dx$	*10)*	$\int (\sin 2x - 5^x)dx$
11)	$\int \frac{5x^2 - 2x + 4x^5}{x} dx$	*12)*	$\int (\sin 6x - 3\cos x)dx$
13)	$\int (x^{-3} - 8x^{-5})dx$	*14)*	$\int \left(\sin\frac{x}{6} + x^7\right)dx$
15)		*16)*	$\int \frac{2dx}{\cos^2 x}$

	$\int\left(7x^{-3}-x^{-2}-1\right)dx$		
17)	$\int\frac{dx}{x^2}$	*18)*	$\int\frac{dx}{6\sin^2 x}$
19)	$\int\left(5x^{\frac{3}{2}}-7x^{\frac{3}{4}}\right)dx$	*20)*	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-25}}$
21)	$\int 5x\sqrt{x}dx$	*22)*	$\int\frac{dx}{\sqrt{16x^2-81}}$
23)	$\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$	*24)*	$\int\frac{5dx}{x^2+36}$
25)	$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$	*26)*	$\int\frac{dx}{4x^2+64}$
27)	$\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$	*28)*	$\int\frac{dx}{(4x+1)^4}$
29)	$\int\left(\frac{3}{x^2}-\frac{5}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt[7]{x}}{2}\right)dx$	*30)*	$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{3x-2}}$

Задание№ 3. Вычислите определённые интегралы

1) $\int_{-1}^{0}\left(x^2+2x\right)dx$	*8)* $\int_{0}^{1}\frac{dx}{(3x+1)^4}$	*15)* $\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{9}}\frac{dx}{\sin^2 3x}$
2) $\int_{-2}^{3}\left(4x^2-3x+2x+1\right)dx$	*9)* $\int_{-2}^{5}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+3\ )^2}}$	*16)* $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x+2}$
3) $\int\frac{dx}{x^2}$	*10)* $\int_{1}^{4}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$	*17)* $\int_{0}^{1}e^{3x}dx$

4) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x^3}$	11) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} \sin 2x dx$	18) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$
5) $\int_{0}^{4} \sqrt{x} dx$	12) $\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos\frac{x}{4} dx$;	19) $\int_{5}^{5\sqrt{3}} \frac{dx}{25+x^2}$
6) $\int_{4}^{5} \left(4-x^2\right)^2 dx$	13) $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$	20) $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3\sqrt{3}}{4}} \frac{4dx}{9+16x^2}$
7) $\int_{8}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$	14) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{3}}$	21) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x + \cos x)^2 dx$

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Расчетная работа.

Вычисление площадей криволинейных трапеций.

Формулировка проблемы

Сечение траншеи имеет форму, близкую к криволинейной трапеции, описываемой функцией у (х). Ширина траншеи на ее поверхности $[d_1; d_2]$ м, наибольшая глубина h м. Найдите площадь «живого сечения» траншеи, если она полностью заполнена водой.

Инвариантность задается изменением размеров сечения.

№ варианта	функция	d_1	d_2
1	$y = x^2 - 2x + 2$; y = 0	-1	2
2	$y = -x^2 + 4x$; y = 0		
3	$y = \frac{4}{x}$, y = 0	1	e

4	$y = 2\sin x$; $y = -\sin x$	0	$\frac{2\pi}{3}$
5	$y = -\frac{1}{3}x^2 + 3$; y=0		
6	$y = -2x^2 + 8$; y = 0		
7	$y = -x^2 + 4$; y = 3		
8	$y = x^2 - 9$; y = 0		
9	$y = (x-3)^2 - 4$; y = 0	1	5
10	$y = \sqrt{8x}$; $y = x^2$	16	25

Расчетная часть: проводятся расчеты, связанные с вычислением определенного интеграла.

Графическая часть: в системе координат изобразить сечение траншеи.

Вопросы к защите работы:

- определение криволинейной трапеции;

-способы вычисления площадей плоских фигур;

-свойства определенного интеграла.

Время на выполнение: 90- мин. (час.),
в том числе:
подготовка 10 мин.;
выполнение 1 час.10 мин.;
оформление и сдача 10 мин.

Работа выполняется в тетради для практических работ.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо

70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическая работа №4

Тема: Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными; однородных дифференциальных уравнений первого порядка; линейных дифференциальных уравнений первого порядка **.**

Цель: закрепить умение решать основные виды дифференциальных уравнений первого и второго порядка, применять способ решения в зависимости от вида уравнения.
При выполнении практической работы студент должен

уметь:

-применять методы дифференциального и интегрального исчисления;

-решать простые дифференциальные уравнения

знать:

- определение дифференциального уравнения
- определения общего и частного решений дифференциальных уравнений
- основные виды дифференциальных уравнений первого и второго порядка
- основные методы решений дифференциальных уравнений первого и второго порядка

Формируемые компетенции:

ОК2. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для решения задач профессиональной деятельности;

ОК 4. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

ОК.5.Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

Порядок выполнения работы:

1.Изучить теоретический материал по теме «Дифференциальные уравнения.».

2.Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

3. Ответить на контрольные вопросы.

4. Выполнить самостоятельную работу**.**

5. Сдать отчет по проделанной работе.

Краткие теоретические сведения.

Определение:

1.Уравнения, в которых неизвестными являются функции и в которые входят не только сами функции, но и их производные, называются дифференциальными уравнениями.

2. Если в уравнение входят независимая переменная, неизвестная функция и ее первая производная, то это уравнение называется дифференциальным уравнением первого порядка.

3.Если в уравнение входит производная второго порядка от искомой функции, то уравнение называется дифференциальным уравнением второго порядка.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (искомой функции), входящей в это уравнение.

В общем случае дифференциальное уравнение первого порядка можно записать в следующем виде:

$\mathbf{F(x;y;y') = 0}$, (1)

где $\mathbf{y = y(x)}$ – искомая неизвестная функция, $\mathbf{y' = y'(x)}$ – ее производная по $\mathbf{x}$, а$\mathbf{F}$-заданная функция переменных $\mathbf{x, y, y'}$.

Функция $\underline{\boldsymbol{\varphi}\mathbf{(x)}}$, $\mathbf{x \in (a;b)}$, называется решением дифференциального уравнения

$\mathbf{y' = f(x; y)}$ (2) ,

если она имеет производную $\boldsymbol{\varphi}'\mathbf{(x)}$на$\mathbf{(a; b)}$ и если для любого $\mathbf{x \in (a;b)}$ справедливо равенство

$\boldsymbol{\varphi}'\mathbf{(x) = f(x;}\boldsymbol{\varphi}\mathbf{(x))}$.

Другими словами, функция **φ (x),** **x Є (a;b)** , называется решением дифференциального уравнения (2), если уравнение (2) при подстановке ее вместо **y** обращается в тождество по **x** на интервале **(a;b).**

Аналогично определяется решение дифференциального уравнения (1) .

Задача нахождения уравнения решения уравнения (2), удовлетворяющего условию

$\mathbf{y(x_0) = y_0}$, (3)

где x_0, y_0- заданные числа, называется задачей Коши. Условие (3) называется начальным условием. Решение уравнения (2), удовлетворяющее начальному условию (3), называется решением задачи Коши.

Множество всех (или почти всех) решений дифференциального уравнения задается формулой

y = φ (x;C), (4) где **C**– произвольная постоянная.

Функция (4), которая при каждом фиксированном значении**C**как функция от **x** является решением уравнения (2), называется общим решением уравнения (2).

Каждое решение уравнения (2), которое получается из общего решения (4) при конкретном значении постоянной **C**, называется частным решением. Постоянная **C** называется постоянной интегрирования.

Умножив обе части уравнения (2) на дифференциал независимой переменной **dx**, получим уравнение, содержащее дифференциалы:

dy = f(x,y)dx. (5)

Уравнение (5) также называется дифференциальным уравнением первого порядка. Из определения дифференциала следует, что уравнение (5) равносильно уравнению (2).

Уравнения с разделяющимися переменными.

1.Определение.

Дифференциальное уравнение вида y`=f(x)g(y), (1) где f(x) и g(y) – заданные функции, называются уравнениями с разделяющимися переменными.

Для тех **y**, для которых $\mathbf{g(y)\neq 0}$, уравнение (1) равносильно уравнению $\mathbf{p(y)y^{`} = f(x)}$ (2).

В этом уравнении переменная **y** присутствует лишь в левой части, а переменная **x**–лишь в правой части.

В дифференциалах уравнение (2) имеет вид: $\mathbf{p(y)dy = f(x)dx}$ (3)

Здесь слева стоит дифференциал некоторой функции **P(y)**, зависящей от **y**, а справа – дифференциал функции **F(x)**, зависящей от **x.**

Проинтегрировав обе части уравнения (2) по **x**, получим

$\underline{\mathbf{P(y) = F(x) + C}}$ (4)

где **C**- произвольная постоянная. Формула (4) задает общее решение уравнения (2).

2.Правило нахождения общего решения.

Для нахождения общего решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными следует:

2. разделить переменные, т.е. преобразовать данное уравнение к виду

$\mathbf{p(y)dy = f(x)dx}$; (1)

2) проинтегрировать обе части полученного уравнения по **y** и по **x** соответственно, т.е. найти некоторую первообразную **P(y)** функции **p(y)** и некоторую первообразную **F (x)** функции **f(x)**;

3) написать уравнение $\mathbf{P(y) = F(x) + C}$ (2),

где**C**- произвольная постоянная.

Решив уравнение (2) относительно y, получим общее решение дифференциального уравнения (1) :

$\mathbf{y = \varphi\ (x;C)}$,

которое называется также **общим решением данного уравнения.**

Пример 1. Решить уравнение

$y^{`} = 1$.

Решение:

Представим $y^{`}$ через $\frac{dy}{dx}$: $y^{`} = \frac{dy}{dx}$. Тогда $\frac{dy}{dx} = 1$. Умножим обе части уравнения на dx, получим: $dy = 1dx$.

Интегрируем обе части уравнения: $\int dy = \int 1dx$.

Отдельно найдем каждый интеграл:

$\int dy = y$; $\int 1dx = x + C$.

Приравниваем полученный результат:

$y = x + C$.

Итак, решением является функция $y = x + C$.

Ответ: $y = x + C$.

Пример 2. Решить уравнение

$y^{`} = x$

Решение: Представим $y^{`}$ через $\frac{dy}{dx}$: $y^{`} = \frac{dy}{dx}$. Тогда $\frac{dy}{dx} = x$

Умножим обе части уравнения на dx, получим : $dy = xdx$.

Интегрируем обе части уравнения: $\int dy = \int xdx$.

Отдельно найдем каждый интеграл:

$\int dy = y$; $\int xdx = \frac{1}{2} x^2 + C$.

Приравниваем полученный результат: $y = \frac{1}{2} x^2 + C$.

Итак, решением является $y = \frac{1}{2} x^2 + C$.

Ответ: $y = \frac{1}{2} x^2 + C$.

Пример 3. Решить уравнение

$y^{`} = xy$.

Решение: Представим $y^{`}$ через $\frac{dy}{dx}$: $y^{`} = \frac{dy}{dx}$. Тогда $\frac{dy}{dx} = xy$

Умножим обе части уравнения на dx, получим : $dy = xydx$.

Разделим обе части уравнения на y, получим :

$\frac{dy}{y} = xdx$

Интегрируем обе части уравнения: $\int \frac{dy}{y} = \int xdx$

Отдельно найдем каждый интеграл:

$\int \frac{dy}{y} = \ln|y|$ $\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + C.$

Приравнивая полученный результат, имеем: $\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C_1$, где C_1- произвольная постоянная. Отсюда следует, что

$|y| = e^{\frac{1}{2}x^2 + C}$. или $y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$. , где $C = e^{C1}$

Таким образом, формула $y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$. задает все решения уравнения.

Ответ: $y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$.

Пример 4. Решить уравнение

$y` = xy^2$.

Решение: Представим y` через $\frac{dy}{dx}$ : $y` = \frac{dy}{dx}$. Тогда $\frac{dy}{dx} = xy^2$.

Умножим обе части уравнения на dx, получим :$dy = xy^2dx$.

Разделив переменные, получим:$\frac{dy}{y^2} = xdx$

Проинтегрировав обе части уравнения $\int \frac{dy}{y2} = \int xdx$, получим:

$\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y}$;$\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + C$ и, следовательно, $-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + C$.

Таким образом, общее решение данного уравнения имеет вид:

$y = -\frac{2}{x^2 + C}$, где C – произвольная постоянная.

Ответ: $y = -\frac{2}{x^2 + C}$

Пример 5. Решить уравнение

$y` = -\frac{x}{y}$.

Решение. Представим $y`$ через $\frac{dy}{dx}$: $y` = \frac{dy}{dx}$. Тогда $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

Разделив переменные: $ydy = -xdx$,

и проинтегрировав: $\int ydy = \int -xdx$,

получим: $\int ydy = \frac{1}{2}y^2, -\int xdx = -\frac{1}{2}x^2 + C$

$y^2 + x^2 = C$.

Очевидно, что здесь $C>0$. Положим $C=R^2$.

Полученное уравнение является уравнением окружности радиуса R с центром в точке (0;0). Оно при каждом фиксированном $R>0$ определяет две дифференцируемые функции

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2},\ x \in (a; b),$$

которые и являются решениями данного уравнения.

Ответ: $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2},\ x \in (a; b)$.

Пример 6. Решить уравнение $y` = 1+y^2$.

Решение: Представим $y`$ через $\frac{dy}{dx}$: $y` = \frac{dy}{dx}$. Тогда $\frac{dy}{dx} = 1+y^2$

Разделив переменные $\frac{dy}{1+y^2} = dx$ и проинтегрировав обе части уравнения

$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx$, получим:

$\int \frac{dy}{1+y^2} = \operatorname{arctg} y$; $\int dx = x + C$.

Итак:

$\operatorname{arctg} y = x + C$, где C – произвольная постоянная. Отсюда следует, что

$y = \operatorname{tg}(x + C)$.

Ответ: $y = \operatorname{tg}(x + C)$.

Пример 7. Решить уравнение

$(1+x)dy = 2ydx$, если при $x=0$ $y=4$.

Решение.Разделив переменные, получим:$\frac{dy}{2y}=\frac{dx}{1+x}$.

Проинтегрировав обе части уравнения , **получим** $\int \frac{dy}{2y} = \int \frac{dx}{1+x}$

$\int \frac{dy}{2y} =\frac{1}{2}\ln|y|=\ln\sqrt{y}$; $\int \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x|+C$

Итак,$\ln\sqrt{y} = \ln|1+x|+C$;

Находим значениеСиз условия $x=0$ и$y=4$; сделав подстановку, получим:

$\ln\sqrt{4} = \ln|1-0| + C$, $\ln 2=\ln 1+ C$, $\ln 2= 0 + C$, $C = \ln 2$.

Итак,$\ln\sqrt{y} = \ln|1+x| + \ln 2$; $\ln\sqrt{y} =\ln|1+x|\,2$, $y = 4(1 + 2)^2$

Ответ: $y = 4(1 + 2)^2$.

Пример 8. Найти частные решения уравнения

$dy +xdx = 2dx$, если при $x=1$ $y=1,5$.

Решение. Разделив переменные и проинтегрировав обе части уравнения, получим

$\int dy = \int(2-x)\,dx$.

$\int Dy= y;\int(2-x)\,dx= 2x - \frac{1}{2}x^2+ C$.

Итак, $y = 2x - \frac{1}{2}x^2+ C$.

Ответ: $y = 2x - \frac{1}{2}x^2+ C$.

Находим значение C из условия $x =1$ при $y = 1,5$; сделав подстановку, получим:

$1,5 = 2\cdot1- \frac{1}{2}\cdot1^2+ C$, $C = 1,5-1,5 = 0$.

Итак, $y = 2x -\frac{1}{2}x^2$.

Ответ:$y = 2x -\frac{1}{2}x^2$.

1.Общее решение линейного дифференциального уравнения первого

порядка.

Дифференциальные уравнения вида

$y' = f(x)y + g(x)$ (1)

называются линейными дифференциальными уравнениями первого порядка.

Если $g(x) = 0$, то линейное дифференциальное уравнение (1) называется однородным. Оно имеет вид

$$y' = f(x)y \qquad (2).$$

Уравнение (2) является уравнением с разделяющимися переменными. Все решения этого уравнения задаются формулой

$$y = Ce^{F(x)}, \qquad (3)$$

где $F(x)$ –некоторая первообразная функции $f(x)$, а C – произвольная постоянная. В частности, если функция $f(x)$ постоянная, например $f(x)=k$ для любого x, то уравнение

$$y' = ky$$

имеет общее решение

$y = Ce^{kx}$.

Если $f(x) = 0$, то уравнение (1) принимает вид

$y' = g(x)$.

Как известно, общим решением этого уравнения будет

$y = G(x) + C$,

где $G(x)$ – некоторая первообразная функции $g(x)$, а C– произвольная постоянная.

Теорема. Если $y = \varphi(x)$ – некоторое решение уравнения (1), то все решения этого уравнения задаются формулой

$y = C e^{F(x)} + \varphi(x)$, (4)

где $Ce^{F(x)}$ – общее решение однородного уравнения (2).

Для нахождения общего решения уравнения (1) достаточно найти хотя бы одно его частное решение.

Для линейного уравнения вида

y`= ky+b, (5)

где **k** и **b** – некоторые числа и **k≠ 0**, частное решение легко находится. Им будет постоянная функция $\mathbf{y = -\frac{b}{k}}$. Поэтому общее решение уравнения (5) имеет вид:

$$\mathbf{y = Ce^{kx} - \frac{b}{k}}.$$

Пример 1. Решить уравнение

y`+2y+3 =0.

Решение: У этого уравнения k= -2, b=-3. Следовательно, общее решение определяется формулой

$$y = Ce^{-2x} - \frac{3}{2},$$

где C–произвольная постоянная.

Ответ: $y = Ce^{-2x} - \frac{3}{2}$.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

y`+ xy =4x.

Решение. Подбором находим, что функция y=4 является решением данного линейного неоднородного уравнения. Найдем теперь общее решение соответствующего однородного уравнения:

y` + 4x =0.

По формуле 4 получаем, что общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = Ce^{-0,5x^2} .$$

Общее решение данного уравнения задается формулой

$$y = Ce^{-0,5x^2} + 4,$$

гдеC – произвольная постоянная.

Ответ: $y = Ce^{-0,5x^2}+4$.

2.Применим теперь тот же способ решения к линейному уравнению общего вида

$$y' + P(x)\, y = Q(x). \qquad (6)$$

Полагаем $y = uv$, откуда $y' = u'v + uv'$, тогда уравнение (6) преобразуется в уравнение

$$u'v + uv' + P(x)\, uv = Q(x)$$

или $v\frac{du}{dx} + u(\frac{dv}{dx} + P(x)v) = Q(x)$.

Пользуясь правом произвольного выбора одной из функций **u** или **v,** выбираем функцию v как одно из решений уравнения

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0.$$

Разделив переменные в этом уравнении, находим

$$\frac{dv}{v} = -P(x)dx,$$

откуда

$$\int \frac{dv}{v} = -\int P(x)dx, \qquad \ln v = -\int P(x)dx$$

$$v = e^{-\int P(x)dx}.$$

При таком выборе функции v уравнение (6) примет вид

$$e^{-\int P(x)dx}\frac{du}{dx} = Q(x),$$

что дает $\frac{du}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}$.

Интегрируя, находим

$$u = \int (Q(x)\, e^{\int P(x)dx})dx + C,$$

и, наконец

$$y = e^{-\int P(x)dx}\{\int (Q(x)\, e^{\int P(x)dx})dx + C\}.$$

Таково общее решение линейного дифференциального уравнения (6).

Пример 3. Решить уравнение

$$y` + \frac{2}{x}y = x^2.$$

Решение: Будем искать решение данного уравнения в виде произведения двух функций **u** и **v** переменной **x**, т.е. положим

y= uv, отсюда

y`=u`v+uv`,

и данное уравнение преобразуется в уравнение

$u`v+uv`+\frac{2}{x}uv = x^2$ или $u`v +(v`+\frac{2}{x}v) = x^2$.

В целях упрощения уравнения выберем функцию v так, чтобы выражение $v`+\frac{2}{x}v$обратилось в нуль (стоящее в скобках); иначе говоря, возьмем за функцию vодно из решений уравнения

$v`+\frac{2}{x}v=0.$

Представим это уравнение в виде$\frac{dv}{dx}+\frac{2v}{x}=0$ и, разделяя переменные, получим

$\frac{dv}{v}= - \frac{2}{x}dx$

откуда$\int\frac{dv}{v} = \int -\frac{2}{x}dx$,$\ln v = -2\ln|x|$ и

$v= \frac{1}{x^2}.$

При таком выборе функции v уравнение приводится к виду

$\frac{u`}{x2}= x^2$ или $\frac{du}{dx} = x^2$.

Отсюда $du = x^4dx$, $\int du =\int x^4dx$ и

$u =\frac{1}{5} x^5+C.$

Мы положили **y = uv**. Следовательно, общее решение исходного уравнения получается в виде:

$y = (\frac{1}{5} x^5+C)\cdot\frac{1}{x^2}$, или $y= \frac{1}{5}x^3+Cx^{-2}$.

Задания для самостоятельной работы.

Вариант 1

Задание №1.

Решить дифференциальное уравнение:

1. $y^{`} = x + \sin x$;

2. $y^{`} = e^{-y} - 1$;

1. $y^{`} + 4xy = x$;

2. $y^{`} + 4x^2y = \frac{1}{x}$;

Задание 2. Решить дифференциальное уравнение:

$\frac{2x-1}{y+1} = \frac{dy}{dx}$, если при $x = 5$ $y = 0$.

Задание 3.За 30 дней масса радиоактивного вещества уменьшилась на 50%. Через какое время останется 1% от начального количества этого вещества, если известно, что скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна его количеству?

Вариант 2

Задание 1.

Решить дифференциальное уравнение:

3. $y^{`} = \frac{y+1}{x-1}$;

4. $y^{`} = e^{x+y}$;

. $y^{`} - 3xy = 2$;

3. $y^{`} - (\cos x)y = x$;

Задание 2. Решить дифференциальное уравнение:

$(1+y)dx - (1-x)\,dy = 0$, если при $x = 0$ $y = 1$.

Задание 3. Скорость тела пропорциональна пройденному пути. За первые 10 с тело проходит 100 м, за 15 с -- 200 м. Какой путь пройдет тело за

20 с?

Контрольные вопросы.

1).Понятие дифференциального уравнения

2).Определения общего и частного решений дифференциальных уравнений

Время на выполнение: 90- мин. (час.),
в том числе:
подготовка 10 мин.;
выполнение 1 час.10 мин.;
оформление и сдача 10 мин.

Работа выполняется в тетради для практических работ.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическая работа №5

Тема: Решение линейных однородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение прикладных задач.

Цель: закрепление умения решать линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

При выполнении практической работы студент должен

уметь:

– классифицировать дифференциальные уравнения
– решать дифференциальные уравнения первого и второго порядка
– решать несложные задачи на применением дифференциальных уравнений.

Знать:

- определение дифференциального уравнения
- определения общего и частного решений дифференциальных уравнений
- основные виды дифференциальных уравнений первого и второго порядка
- основные методы решений дифференциальных уравнений первого и второго порядка

Формируемые компетенции:

ОК2. Осуществлять поиск, анализ и интерпритацию информации, необходимой для решения задач профессиональной деятельности;

ОК 5. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

Порядок выполнения работы:

1.Изучить теоретический материал по теме «Линейные однородные уравнения второго порядка ».

2.Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

3. Ответить на контрольные вопросы.

4. Выполнить самостоятельную работу**.**

5. Сдать отчет по проделанной работе.

Краткие теоретические сведения.

.Дифференциальные уравнения второго порядка.

В общем случае дифференциальное уравнение второго порядка можно записать в виде

$F(x; y; y^{`}; y^{``}) = 0$, (1)

где $y = y(x)$ –искомая неизвестная функция, $y^{`} = y^{`}(x)$ и $y^{``} = y^{``}(x)$ –ее производные по x первого и второго порядков, а F – заданная функция переменных $x, y, y^{`}, y^{``}$.

Функция $\varphi(x)$, где $x \in (a; b)$, называется решением дифференциального уравнения (1), если она имеет производные $\varphi^{`}(x)$ и $\varphi^{``}(x)$ и если для любого $x \in (a; b)$ справедливо равенство

$F(x, \varphi(x), \varphi`(x), \varphi``(x)) = 0$.

Другими словами, функция $\varphi(x)$, $x \in (a; b)$, называется решением уравнения (1), если при подстановке $\varphi(x)$ вместо y это уравнение обращается в тождество по x.

Дифференциальное уравнение вида

$y`` = f(x, y, y`)$, (2)

где f – заданная функция переменных $x, y, y`$, называется уравнением, разрешенным относительно второй производной.

2.Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами.

Дифференциальные уравнения вида

$y`` + py` + qy = f(x)$, (1)

где p и q - некоторые числа, называются линейными дифференциальными уравнениями второго порядка. Функция $f(x)$ называется свободным членом или правой частью уравнения (1).

Если $f(x) \equiv 0$, то дифференциальное уравнение называется линейным дифференциальным уравнением. Оно имеет вид

$y`` + py` + qy = 0$ (2).

Решением данного уравнения является функция

$y = C_1y_1 + C_2y_2$,

где y_1 и y_2 – два линейно независимых частных решения уравнения (2), C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Эти решения находят в виде $y = e^{kx}$, где k - неопределенная постоянная. Для нахождения k составляют характеристическое уравнение

$k^2 + pk + q = 0$, заменив $y`` = k^2$, $y` = k$, $y = 1$.

Решая уравнение (2), находим его корни k_1 и k_2. Возможны такие три случая.

1) Если k_1 и k_2 – действительные и разные числа , то $y_1 = e^{k1x}$ $y_2 = e^{k2x}$, а общее решение имеет вид $y = C_1e^{k1x} + C_2e^{k2x}$.

2) Если $k_1 = k_2 = k$, то $y_1=e^{kx}$, $y_2= xe^{kx}$ и

$y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}=e^{kx} (C_1+ C_2x)$.

3) Корни k_1 и k_2 мнимые ($k_1=\alpha+\beta i$и $k_2 =\alpha-\beta i, \beta \neq 0$).

Тогда$y_1= e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$, *иобщеерешение* имеет вид

$y= e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$.

Если, к примеру $\alpha=0$, то $y = C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x$.

Пример 1. Найти все решения уравнения

$$y``- y = 0. \qquad (3)$$

Решение. Составим характеристическое уравнение, произведя замену:

$y``= k, y=1$; получим:

$k^2- 1 =0$ и

$k_1=-1, k_2= 1$.

Тогда $y_1=e^{-x}$, $y_2=e^x$ и общее решение имеет вид

$y= C_1e^{-x} + C_2e^x$.

Ответ:$y= C_1e^{-x} + C_2e^x$.

Пример 2. Найти все решения уравнения

$y``+6y`+9 = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение, произведя замену $y``=k^2$, $y`=k, y=1$

$k^2 + 6k + 9 = 0$.

Корнем данного уравнения есть $k_1=k_2= - 3$. Поэтому $y_1=e^{-3x}$, $y_2= xe^{-3x}$ и общее решение $y = C_1e^{-3x}+ C_2xe^{-3x}=e^{-3x}(C_1 + C_2x)$.

Ответ: $y=e^{-3x}(C_1 + C_2x)$.

Пример 3. Найти все решения уравнения

$y``- 7y`+ 6y = 0$.

Решение. Запишем характеристическое уравнение для заданного дифференциального уравнения, заменив $y`` = k^2, y` = k, y = 1$.

Получим $k^2 - 7k + 6 = 0.$ Корни этого уравнения $k_1 = 1, k_2 = 6.$ Поэтому

$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{6x}$ и общее решение $y = C_1e^x + C_2e^{6x}$.

Ответ: $y = C_1e^x + C_2e^{6x}$.

Пример 4. Найти общие решения уравнения

$y`` - 2y` + 17y = 0.$

Решение. Запишем характеристическое уравнение для заданного дифференциального уравнения, произведя замену $y`` = k^2, y` = k, y = 1$.

Получим $k^2 - 2k + 17 = 0.$

Дискриминант этого уравнения $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 17 = -64 < 0$. Уравнение имеет два мнимых сопряженных корня $k_1 = 1 + 4i$, $k_2 = 1 - 4i$

Итак, $y_1 = e^x \cos 4x, \quad y_2 = e^x \sin 4x$.

Общее решение $y = C_1e^x \cos 4x + C_2e^x \sin 4x = e^x(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$.

Ответ: $y = e^x(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$.

Пример 5. Найти общие решения уравнения

$y`` + 9y = 0.$

Решение. Запишем характеристическое уравнение, заменив $y`` = k^2, \; y = 1;$

получим $k^2 + 9 = 0.$ Корни этого уравнения – мнимые $k_1 = 3i, k_2 = -3i$.

Поэтому $y_1 = C_1 \cos 3x$, $y_2 = C_2 \sin 3x$.

Общее решение $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$.

Ответ: $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$.

Пример 6. Решить задачу Коши:

$y`` - 6y` + 5y = 0, \; y(0) = 2, \quad y`(0) = -2.$

Решение. Сначала найдем общее решение этого уравнения. Для этого составим характеристическое уравнение, произведя замену

$y`` = k^2, y` = k, y = 1$.

Получим $k^2 - 6k + 5 = 0$, где $k_1=1$, $k_2=5$. При этом $y_1=C_1e^x$, $y_2 = C_2e^{5x}$ и общее решение имеет вид: $y = C_1e^x + C_2e^{5x}$.

Теперь используем начальные условия для нахождения C_1 и C_2.
Подставляя $x=0$ и $y=2$ в общее решение, получим

$2=C_1e^0 + C_2e^0$; или $C_1+C_2=2$. Возьмем производную $y`$ от общего решения: $y`=C_1e^x+ 5C_2e^x$ и подставим сюда значения $x=0$ и $y`=-2$. Имеем

$-2= C_1e^0 + 5C_2e^0$ или $C_1+ 5C_2 = -2$. Для вычисления C_1 и C_2 необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ C_1 + 5C_2 = -2 \end{cases}$$

Решением этой системы уравнений есть $C_1=-1$ и $C_2=3$. Подставляя значения C_1 и C_2 в общее решение, получим искомое частное решение, т.е. решение задачи Коши:

$y =- e^x +3e^{5x}$

Ответ: $y = -e^x +3e^{5x}$.

Задания для самостоятельной работы.

Вариант 1

Задание 1. Решить дифференциальное уравнение:

. $y`` - 24y` + 3y =8x$;

4. $y`` - 4y` +3y = \sin 2x$;

Задание 2. Решить задачу.

Поезд, выйдя со станции, спустя t часов имеет ускорение

$a=(3t^2 -42t +80)$ км/час^2. Найти скорость в конце 2-го часа и расстояние, пройденное за это время.

Вариант 2

Задание 1. Решить дифференциальное уравнение:

5. $y`` - 3y` - 4y = x^2+ 1$;

6. $y`` - 4y = \sin x$;

Задание 2. Решить задачу. Ускорение прямолинейного движения пропорционально квадрату времени. Найти зависимость между s и t, если при $t=0$ $v=0$, $s=1$ и при $t=1$ $s=2$.

Контрольные вопросы

1.Виды дифференциальных уравнений.
2.Методы решения.
3.Привести примеры применения дифференциальных уравнений в физике, технике и т.д.

Время на выполнение: 90- мин. (час.),
в том числе:
подготовка 10 мин.;
выполнение 1 час.10 мин.;
оформление и сдача 10 мин.

Работа выполняется в тетради для практических работ.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическая работа №6

Тема: Решение простейших дифференциальных уравнений линейных относительно частных производных.

Цель: научиться находить частные производные функции многих переменных, решать дифференциальные уравнения линейные относительно частных производных.

При выполнении практической работы студент должен

уметь:

-находить частные производные;

-решать простейшие дифференциальные уравнения, линейные относительно частных производных.

Знать:

-методы решения дифференциальных уравнений;

-правило нахождения частных производных;

Формируемые компетенции:

ОК 4. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

ОК.5.Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

Порядок выполнения работы:

1.Изучить теоретический материал по теме «Частные производные. Дифференциальные уравнения».

2.Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

3. Ответить на контрольные вопросы.

4. Выполнить самостоятельную работу**.**

5. Сдать отчет по проделанной работе.

Краткие теоретические сведения

Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется производная, взятая по этой переменной при условии, что все остальные переменные остаются постоянными. Для функции двух переменных z = f(x, y) *частной производной по переменной x* называется производная этой функции по *x* при постоянном *y*. Обозначается частная производная по x следующим образом: $z'_x,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ f'_x(x_0, y_0),\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$.

Аналогично *частной производной функции* z = f(x, y) *по аргументу y* называется производная этой функции по *y* при постоянном *x*. Обозначения:

$$z'_y,\ \frac{\partial z}{\partial y},\ f'_y(x_0, y_0),\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

Частными производными второго порядка функции z = f(x, y) называются частные производные от ее частных производных первого порядка. Если первая производная была взята, например, по аргументу *x*, то вторые производные обозначаются символами z''_{xx}, z''_{x^2}, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, z''_{xy}, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

При этом $z_{xy}'' = z_{yx}''$

Пример. Найти частные производные $z = y^4 - 2xy^2 + x^2 + 2y + y^2$.

Решение. $z'_x = -2y^2 + 2x$, $z'_y = 4y^3 - 4xy + 2 + 2y$, $z_{xy}'' = -4y$, $z_{yx}'' = -4y$, $z_{xy}'' = z_{yx}''$

Задания для самостоятельной работы.

Вариант I	*Вариант II*	*Вариант III*
1.Найдите частные производные первого и второго порядка		
$z = x\sin y + xy^2$	$z = y\cos x + x^2 y^3$	$z = x^2\sin y + 2xy$

Вариант № 1	Вариант № 2	Вариант № 3
1. Являются ли данные функции решениями данных дифференциальных уравнений		
$y = c_1e^x + c_2xe^x, \quad y'' + 2y' + y = 0$	$y = c_1e^{3x} + c_2e^x, \quad y'' - y' - 6y = 0$	$y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}, \quad y'' + 4y' + 4y = 0$
2. Найти частные решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.		
1) $4xydx - (x^2 + 1)dy = 0;$ при x=1 и y=4 2) $y\sin xdx + \cos xdy = 0;$ $x = \frac{\pi}{3}$ $y = \frac{1}{2}$	1) $\frac{dy}{x-1} - \frac{dx}{y-2} = 0;$ x=0 и y=4 2) $\sqrt{x}dy - \sqrt{y}dx = 0;$ при y=0 и x=0	1) $\frac{dy}{x^2} - \frac{dx}{y^2} = 0;$ при x=0 и y=2 2) $(1+y)dx - (1-x)dy = 0;$ y(-2)=3
3. Решить дифференциальные уравнения:		
$y' = 1 + x$	$(1+x^2)y' - 2xy = 0$	$ydy - (1+2x)dx = 0$

Контрольные вопросы.

1.Дайте определение частной производной.

2.Привести примеры применения дифференциальных уравнений в физике, технике и т.д.

Время на выполнение: 90- мин. (час.),
в том числе:
подготовка 10 мин.;
выполнение 1 час.10 мин.;
оформление и сдача 10 мин.

Работа выполняется в тетради для практических работ.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическая работа №7

Тема: Определение сходимости рядов по признаку Даламбера. Определение сходимости знакопеременных рядов. Разложение функций в ряд Маклорена.

Цель: отработать навыки определения сходимости рядов, разложения функции в ряд Маклорена.

При выполнении практической работы студент должен

уметь:

- находить общий член ряда по нескольким первым
- находить любой член ряда по общему
- выяснять сходимость ряда по одному из методов
- разлагать функции в ряд Маклорена

- определение ряда
- признаки сходимости ряда
- методику разложения функции в ряд Маклорена

знать:

-определение сходимости рядов по признаку Даламбера

- определение сходимости знакопеременных рядов

-разложение функции в ряд Маклорена

Формируемые компетенции:

ОК 4. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

ОК.5.Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

Порядок выполнения работы:

1.Изучить теоретический материал по теме «Ряды».

2.Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

3. Ответить на контрольные вопросы.

4. Выполнить самостоятельную работу**.**

5. Сдать отчет по проделанной работе.

Краткие теоретические сведения

1. Определение числового ряда.

Пусть задана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, ...a_n, ...$. Выражение

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

называется *числовым рядом*.

Числа $a_1, a_2, a_3, ...a_n, ...$ называются *членами* этого ряда. Член a_n ряда (1), стоящий на n-ом месте, считая от начала, называется общим членом этого ряда.

Ряд (1) считается заданным, если известен общий член его, выраженный как функция номера n.

Выражение (1) удобно обозначать следующим образом: $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Сумма конечного числа n первых членов ряда называется n-ой *частичной* суммой ряда.

Рассмотрим частичные суммы: $S_1 = a_1;$

$S_2 = a_1 + a_2;$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3;$

. . . .

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n.$

Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то его называют *суммой* ряда (1) и говорят, что ряд (1) ***сходится.***

Если $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует (например $S_n \to \infty$, при $n \to \infty$), то говорят, что ряд (1) ***расходится*** и суммы не имеет.

Пример 1.1. Используя определение частичной суммы ряда, показать, что ряд сходится и найти его сумму $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + ...$

Решение. Найдем частичные суммы ряда:

$S_1 = \frac{1}{2};$ $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};$ $S_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4};$

$S_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}.$

Получаем следующую последовательность частичных сумм:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \dots$$

Общий член данного ряда $\frac{n}{n+1}$. Данная последовательность сходится и ее предел равен 1. $S = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$

Пример 1.2. Составить общий член ряда и найти сумму ряда

$\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + ...$

Решение. Формула общего члена данного ряда $\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}$. Разложим эту дробь на сумму простых дробей, т. Е. представим $\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}$ как сумму $\frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2}$.

Найдем коэффициенты A и B. Для этого приведем сумму к общему знаменателю и сгруппируем слагаемые в числителе:

$$\frac{A}{n+1}+\frac{B}{n+2}=\frac{A(n+2)+B(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\frac{(A+B)n+2A+B}{(n+1)(n+2)}.$$

Приравняв числитель исходной дроби и полученной, получаем, систему уравнений:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B=1 \end{cases}$$

Из которой находим: A = 1; B = -1. Таким образом, общий член ряда может быть получен по формуле: $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$, а искомая сумма будет иметь вид:

$$S=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+...=(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+...+(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})...,$$

и в пределе будет равна: $S=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2})=\frac{1}{2}$.

5. Частные случаи числовых рядов.

2.1. Геометрический ряд.

Сумма членов геометрической прогрессии (с первым членом отличным от нуля) сходится только тогда, когда знаменатель прогрессии по абсолютной величине меньше единицы.

Пример 2.2. Найти сумму ряда: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...$

<u>Решение:</u> Последовательность чисел $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},...$ является геометрической прогрессией, у которой $q=\frac{1}{2}<1$, следовательно, искомую сумму находим по формуле: $S=\frac{a}{1-q}$.

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

Пример 2.3. Представить бесконечную десятичную дробь 0,(18) в виде обыкновенной дроби.

<u>Решение:</u> Представим бесконечную дробь 0,(18) в виде суммы:

0,(18)=0,18+ 0,0018 + 0,00000018 + …

Слагаемые в правой части равенства – члены геометрической прогрессии, у которой первый член равен 0,18, а $q=0{,}01<1$. Найдем сумму по формуле:

$S = \dfrac{a}{1-q}$.

$$S = \frac{0{,}18}{1-0{,}18} = \frac{0{,}18}{0{,}99} = \frac{2}{9}.$$

2.2 Гармонический ряд.

Пример 2.4. Определить сходимость числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Решение. Данный числовой ряд называется гармоническим рядом. Формула общего члена: $a_n = \dfrac{1}{n}$.

Докажем, однако, что исходный ряд расходится методом от противного.
Предположим, что данный ряд сходится, тогда $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ и $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} - \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$.

Однако, $S_{2n} - S_n = \dfrac{1}{n+1} + \ldots \dfrac{1}{2n} > n \cdot \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}$. Получили противоречие, следовательно, гармонический ряд расходится.

2.3 Обобщенный гармонический ряд.

Определение. Обобщенным гармоническим рядом называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

если $p > 1$ - сходится, а если $p \le 1$ - расходится.

3. Основные свойства рядов.

1. Если сходится ряд, получившийся из данного ряда (1) отбрасыванием нескольких его членов, то сходится и сам данный ряд. Обратно, если сходится данный ряд, то сходится и ряд, получившийся из данного, отбрасыванием нескольких членов.
2. Если ряд (1) сходится и его сумма равная *S*, то ряд

$$ca_1 + ca_2 + ca_3 + \ldots + ca_n + \ldots$$

где *c* – произвольное действительное число, так же сходится и его сумма равна *cS*.

3. Если ряды $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ и $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots$ сходятся и их суммы, соответственно равны S_1 и S_2, то ряды

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)..+(a_n+b_n)...$$

$$(a_1-b_1)+(a_2-b_2)..+(a_n-b_n)...$$

также сходятся и их суммы равные соответственно S_1+S_2 и S_1-S_2.

6. Необходимый признак сходимости рядов.

Теорема. (Необходимый признак сходимости ряда). Если ряд сходится, то его *n-й*
член стремится к нулю при неограниченном возрастании *n*.

Доказательство. Пусть ряд (1) сходится. Тогда $a_n = S_n - S_{n-1}$ и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Следствие. Если *n-й* член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится.

Пример 4.1. Определить сходимость числового ряда $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+...+\frac{n}{2n+1}+...$

Решение. Воспользуемся необходимым признаком сходимости ряда. Для данного числового ряда записываем формулу общего члена и вычисляем предел

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$$

Так как предел не равен нулю, то исходный ряд расходится.

Подчеркнем, что рассмотренный признак является только необходимым, но не является достаточным, то есть из того, что *n*-й член ряда стремится к нулю, ещё не следует, что ряд сходится – ряд может и расходиться.

7. Положительные ряды.

Определение: Положительным рядом называется ряд, члены которого не отрицательны.

Теорема. Для того, чтобы положительный ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм этого ряда была ограничена сверху.

Первый достаточный признак сходимости.

Пусть даны два ряда с положительными членами: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и каждый член первого ряда не превосходит соответствующего члена второго ряда $a_1 \le b_1$, $a_2 \le b_2$ и т. Д.

Тогда

а) если второй ряд сходится, то и первый ряд сходится,

б) если первый ряд расходится, то и второй ряд расходится.

Второй достаточный признак сравнения.

Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

*Пример 5.1***.** Определить сходимость числового ряда $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^3}+\ldots+\dfrac{1}{n^n}+\ldots$

Решение. Поскольку все слагаемые данного числового ряда положительны, воспользуемся первым признаком сравнения. Все члены исходного ряда не больше соответствующих членов ряда $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}+\ldots$, члены которого образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\dfrac{1}{2}$. В примере 1.3. было показано, что такие числовые ряды ($q<1$) сходятся. Следовательно, и данный ряд сходится.

Теорема (Признак сходимости Даламбера). Пусть дан числовой ряд с положительными членами. Если отношение *(n+1)-го* члена к *n-му* члену при $n\to\infty$ имеет конечный предел, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$$

то 1) при $\rho<1$ – ряд сходится;

2) при $\rho>1$ – ряд расходится.

Пример 5.3**.** Исследовать сходимость ряда $1+\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}+\ldots$

Решение. Воспользуемся признаком сходимости Даламбера. Определим формулу общего члена числового ряда $a_n=\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}=\dfrac{1}{n!}$ и $a_{n+1}=\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}=\dfrac{1}{(n+1)!}$ и составим отношение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n!}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n+1}$.

Вычисляя предел, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$

Таким образом, исходный ряд сходится.

Пример 5.4. Исследовать сходимость ряда $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+...+\frac{2^n}{n}+...$.

Решение. Воспользуемся признаком сходимости Даламбера. Определим формулу общего члена числового ряда $a_n=\frac{2^n}{n}$ и $a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{n+1}$ и составим отношение, $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{n+1}}{n+1}:\frac{2^n}{n}=\frac{2n}{n+1}$

Вычисляя предел, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2>1..$$

Таким образом, исходный ряд расходится.

Признак Даламбера дает ответ на вопрос о том, сходится ли данный положительный ряд в случае, когда $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ существует и отличен от 1. Если же этот предел не существует или $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, то признак Даламбера не дает возможности установить, сходится ряд или расходится, так как в этом случае ряд может оказаться или сходящимся, или расходящимся. Для решения вопроса о сходимости надо применить какой-либо другой признак.

Пример 5.6. Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+...$

Решение**.** Воспользуемся признаком сходимости Даламбера. Определим формулу общего члена числового ряда $\frac{1}{n(n+1)}$ и $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ составим предел отношения

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1$$

На основании признака Даламбера сходимость установить нельзя. ***Теорема*** (Признак Коши). Если для ряда с положительными членами величина $\sqrt[n]{a_n}$ имеет конечный предел l при $n\to\infty$, т.е. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$

то 1) при $l<1$ – ряд сходится;
2) при $l>1$ – ряд расходится.

Пример 5.7. Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+...+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+...$

Решение. Воспользуемся признаком сходимости Коши. Определим формулу общего члена числового ряда и вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$.

Так как предел конечен и меньше единицы, то по признаку Коши исходный числовой ряд сходится.

Теорема (Интегральный признак сходимости).Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, члены которого положительны и не возрастают, т.е. $a_1\ge a_2\ge a_3\ge\ldots\ge a_n\ge\ldots$, а функция $f(x)$, определена при $x\ge 1$, непрерывная и не возрастающая и $f(1)=a_1;\, f(2)=a_2;\ldots;\, f(n)=a_n;\ldots$. Тогда для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$.

Пример 5.8. Исследовать сходимость обобщенного гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$.

Решение. Пусть $f(x)=\frac{1}{x^p}$. Функция $f(x)$ при $x>0$ (а значит и при $x\ge 1$) положительна и невозрастающая (точнее убывающая). Поэтому сходимость ряда равносильна сходимости несобственного интеграла $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx=\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$.

Имеем $I=\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^{n}\frac{dx}{x^p}$.

Если $p=1$, то $l=\lim\limits_{b\to\infty}\left(\ln|x|\,\Big|_1^b\right)=\lim\limits_{b\to\infty}\left(\ln|b|-\ln 1\right)=\infty$.

Если $p\ne 1$, то $l=\lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right)\Big|_1^b=\frac{1}{1-p}\lim\limits_{b\to\infty}\left(b^{1-p}-1\right)=\begin{cases}\frac{1}{p-1}\,при\; p>1\\ \infty\quad при\quad p<1\end{cases}$

Итак, данный обобщенный гармонический ряд сходится *при* $p>1$ и расходится при *при* $p<1$.

8. Знакочередующиеся и знакопеременные ряды.

Определение. Знакочередующимся рядом называется ряд вида

$$a_1-a_2+\ldots+(-1)^n a_n+\ldots$$

где $a_1;a_2;a_3;\ldots;a_n\ldots$ – положительные числа.

Теорема (Признак Лейбница). Если в знакочередующемся ряде члены таковы, что

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$$

$$\text{и } \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

то ряд сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена.
Замечание. Теорема Лейбница справедлива, если неравенства выполняются, начиная с некоторого номера *N*.

Пример 6.1. Исследовать сходимость ряда $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$.

Решение. Поскольку данный ряд является знакочередующимся, воспользуемся признаком сходимости Лейбница. Определим формулу общего члена числового ряда и проверим условия теоремы. Имеем:

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Так как оба условия выполнены, то исходный ряд сходится по признаку Лейбница.

Определение. Ряд называется *знакопеременным*, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные.

Знакочередующиеся ряды являются частным случаем знакопеременных рядов.

Теорема. Если знакопеременный ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

таков, что ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$$

сходится, то, и данный знакопеременный ряд также сходится.

Определение. Знакопеременный ряд называется *абсолютно* сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

Определение. Если знакопеременный ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится, то данный знакопеременный ряд называется *условно* сходящимся.

*Пример 6.4***.** Исследовать сходимость ряда $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$

Решение. Данный знакопеременный ряд является условно сходящимся, так как ряд, составленный из абсолютных величин его членов, есть гармонический ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$, который расходится. Сам же ряд сходится по признаку Лейбница.

Пример 6.5. Исследовать сходимость ряда $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-....$

Решение. Данный знакопеременный ряд абсолютно сходящийся, так как ряд, составленный из абсолютных величин его членов, сходится.

1. Понятие функционального ряда.

Определение. Ряд называется функциональным, если его членами являются функции независимой переменной.

$$\sum_{n\to 1}^{\infty} u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+...+u_n(x)+...$$

Если переменной $x\in D$ придавать различные числовые значения, то будут получаться сходящиеся или расходящиеся числовые ряды.

Определение. Функциональный ряд называется сходящимся в точке x_0, если этот ряд при $x=x_0$ обращается в сходящийся числовой ряд

$$\sum_{n\to 1}^{\infty} u_n(x_0)=u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+...+u_n(x_0)+...$$

Пример 1.1. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x+x^2+x^3+...+x^n+....$

Если $x_0=2$, то данный функциональный ряд обращается в числовой $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n = 2+2^2+2^3+...+2^n+...$, который очевидно расходится,

а при $x_0=\frac{1}{2}$ в ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+2(\frac{1}{2})^3+...+(\frac{1}{2})^n+...$, который сходится как геометрический со знаменателем $q=\frac{1}{2}$.

Совокупность таких значений переменной *x*, при которых функциональный ряд сходится, называют областью сходимости. Областью сходимости ряда всегда является некоторый интервал, который, в частности, может вырождаться в точку.

Ряд называется расходящимся в точке, если этот ряд в данной точке расходится.

По аналогии с числовыми рядами определяются частичные суммы функционального ряда, предел которых определяет сумму ряда (если существует). Очевидно, что сумма функционального ряда в области сходимости является функцией от *x*, т.е.

$$\sum_{n\to 1}^{\infty} u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=S(x).$$

Если функциональный ряд сходится и имеет сумму $S(x)$, то разность $S(x)-S_n(x)$называют остатком ряда и обозначают $r_n(x)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$.

<u>Определение.</u> Функциональный ряд называется *равномерно сходящимся* на отрезке $[a;b]$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое натуральное число $N=N(\varepsilon)$, не зависящее от x, что для $n>N$ неравенство $|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$ выполняется для всех *x* из отрезка $[a;b]$.

Приведем достаточный признак равномерной сходимости, который удобен в практическом применении.

Теорема (Признак Вейерштрассе). Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, рассматриваемого на отрезке $[a;b]$, существует сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ такой, что для всех $n=1,\ 2,\ \ldots$ и любого $x\in[a,b]$ выполняются неравенства $|u_n(x)|\le c_n$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$сходится равномерно на отрезке $[a;b]$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ в этом случае называется мажорирующим рядом.

Пример 1.2. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(nx)}{n^2}$ на отрезке $[a;b]$.

<u>Решение</u>. Для данного ряда мажорирующий ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, который сходится. При всех n = 1, 2, 3 … имеют место неравенства $\left|\dfrac{\sin(nx)}{n^2}\right|\le\dfrac{1}{n^2}$.

Применяя теорему Вейерштрассе, получаем, что данный ряд равномерно сходится для любого x из интервала $[a;b]$.

Теорема (о почленном интегрировании ряда). Если функции $u_n(x)$ определены и непрерывны на множестве$[a;b]$, а функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на этом же множестве сходится равномерно к сумме$s(x)$, то его можно почленно интегрировать на $[a;b]$, т.е.

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx.$$

Теорема (о почленном дифференцировании ряда). Пусть функции $u_n(x)$ определены на $[a;b]$ и имеют непрерывные первые производные $u_n'(x)$ на $[a;b]$. Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на отрезке $[a;b]$, а функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ равномерно сходится на $[a;b]$, то на этом отрезке

$$(u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x_0)\ldots)' = u_1'(x)+u_2'(x)+\ldots+u_n'(x_0)\ldots$$

Заметим, что условия теорем достаточно жесткие, т.е. нельзя просто интегрировать и, особенно, дифференцировать функциональные ряды почленно. Это может привести к неверным результатам.

2. Степенные ряды.

Определение. Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n\to 1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

,

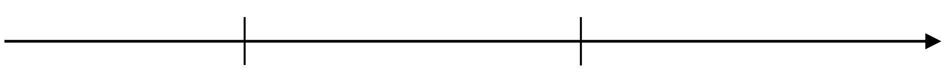
члены которого являются произведением постоянных множителей на степенные функции с целыми показателями от разности $x - x_0$.

В частности, при $x_0 = 0$ получается ряд от самой независимой переменной

$$\sum_{n\to 1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

Теорема Абеля. Если ряд $\sum_{n\to 1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots$ сходится при $x = x_0$, отличном от нуля, то этот ряд сходится для всякого значения x, которое по абсолютной величине меньше x. Если же этот ряд при $x = x_0$ расходится, то он расходится для всякого значения x, абсолютная величина которого больше x.

Пример 2. 1. Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n\to 1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.



Решение. Воспользовавшись признаком Даламбера, вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{x^n}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{(n+1)}=0,$$

который меньше 1, независимо от x. Интервалом сходимости является вся ось OX.

Пример 2.2. Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n\to 1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}$.

Решение. По признаку Даламбера имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}:\frac{x^n}{n\cdot 3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}\cdot n\cdot 3^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}\cdot x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{xn}{3(n+1)}=\frac{|x|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)}$$

Для того, чтобы ряд сходился данный предел должен быть меньше 1, т.е.

$\frac{|x|}{3}<1$ или

$|x|<3$. Значит при $|x|<3$ ряд сходится, а при $|x|>3$- расходится. При x = 3 ряд является гармоническим, а при x = -3 превращается в сходящийся. Итак, интервал сходимости ряда $-3\le x<3$.

Пример 2.3. Определить интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(nx)^n$

Решение. Применим для данного степенного ряда признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n(n+1)x^{n+1}}{n^n\cdot x^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}(n+1)\cdot x=e\cdot\infty=\infty$$

Таким образом, радиус сходимости этого ряда равен нулю, поэтому ряд расходится при всех *x*, кроме *x* = 0.

3. Формула Тейлора.

Пусть дан многочлен $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ и требуется представить его в виде

$f(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\ldots+c_n(x-x_0)^n$, где x_0 – заданное число.

Найдем коэффициенты c_n данного разложения. Если пытаться найти их путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x, получится система из n уравнений с n неизвестными, которую будет очень сложно решить. Поступим другим способом. Коэффициент c_0 легко найти подставив в функцию $x = x_0$. Получим

$$f(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^{\,2} + \ldots + a_nx_0^{\,n} = c_0.$$

Для нахождения остальных коэффициентов найдем *n* производных данного многочлена:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3(x - x_0)^2 \ldots + nc_n(x - x_0)^{n-1},$$

$$f''(x) = 2c_2 + 2\cdot 3(x - x_0) \; + 3\cdot 4(x - x_0)^2 \ldots + (n-1)\cdot nc_n(x - x_0)^{n-2},$$

…

$$f^{n}(x) = 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n\cdot c_n$$

Подставляя в эти формулы $x = x_0$, найдем коэффициенты c_n

Итак: $c_0 = f(x_0)$, $c_1 = f'(x_0)$, $c_2 = \dfrac{f''(x_0)}{2}$, $c_3 = \dfrac{f'''(x_0)}{2\cdot 3}$, …, $c_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Пример 3.1.. Разложить по степеням двучлена x+1 многочлен

$$f(x) = -5 + 4x + 3x^2 - 2x^3 + x^4.$$

<u>Решение</u>. В данном случае $x_0 = -1$.

Найдем производные данной функции:

$$f'(x) = 4 + 6x - 6x^2 + 4x^3$$

$$f''(x) = 6 - 12x + 12x^2$$

$$f'''(x) = -12 + 24x$$

$$f^{iv}(x) = 24$$

Найдем частные значения производных в точке $x = -1$.

$f(-1) = -3$, $f'(-1) = -12$, $f''(-1) = 30$, $f'''(x) = -36$, $f^{iv}(-1) = 24$

Таким образом:

$c_0 = f(-1) = -3,\ c_1 = f'(-1) = -12,\ c_2 = \dfrac{f''(-1)}{2} = 15,\ c_3 = \dfrac{f'''(-1)}{2\cdot 3} = -6,$

$c_{iv} = \dfrac{f^{iv}(-1)}{2\cdot 3\cdot 4} = 1$. В итоге получим:

$$-5+4x+3x^2-2x^3+x^4 = -3-12(x+1)+15(x+1)^2-6(x+1)^3+(x+1)^4.$$

9.Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора.

Если функция $f(x)$ является суммой ряда

$\sum_{n\to 1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$, то говорят, что функция $f(x)$ разлагается в ряд по степеням $x - x_0$.

Важность такого разложения видна хотя бы из того, что мы получаем возможность приближенно заменить функцию суммой нескольких первых членов степенного ряда, т.е. многочленом.

Определение. Если функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеет производные любого порядка, то для нее можно построить ряд

$$f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^n(x_0) + \ldots,$$

который называется рядом Тейлора в точке x_0 этой функции. Если $x_0 = 0$, то этот ряд имеет вид

$f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{f'(0)}{n!}x^n + \ldots$ и называется рядом Маклорена.

Для функции $f(x)$ справедлива при любом n и формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^n(x_0) + r_n$$

, где r_n – остаточный член формулы Тейлора.

Стремление к нулю остаточного члена формулы Тейлора в некоторой окрестности точки x_0 является необходимым и достаточным условием разложимости функции в данной окрестности в ряд Тейлора.

9. Разложение в ряды элементарных функций.

Таблица разложения в ряды Маклорена элементарных функций.

№	Формула	Радиус

п/ п		сходимости
1.	$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$	∞
2.	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$	∞
3.	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$	∞
4.	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \ldots$	$(-1;1]$
5.	$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + \ldots$	$(-1;1]$

Задания для самостоятельной работы.

Вариант 1

Задание 1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = 3^x$

Задание 2. Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость ряд:

$a) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ \ldots..$ $\qquad b) 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \ \ldots..$

Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд:

$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ $\qquad a) \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \ \ldots..$

Задание 3. Дан степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n x^n}{b^n \sqrt{n+1}}$

При заданных значениях a и b написать первые три члена ряда, найти интервал сходимости ряда.

1. *a =5, b=8*
2. *a=2, b=4*

Вариант 2

Задание 1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = x\cos 3x$:

Задание 2. Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость ряд:

$a) 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ \ldots..$ $\qquad b) 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ \ldots..$

Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд:

$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}$ $\qquad$ $a)\ \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\ .....$

Задание 3. Дан степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n x^n}{b^n\sqrt{n+1}}$

При заданных значениях a и b написать первые три члена ряда, найти интервал сходимости ряда.

1.a=3, b=4

2.a=7, b=5

Контрольные вопросы

1. Определение степенного ряда?
2. Определение радиуса и области сходимости?
3. Определение ряда Тейлора и Маклорена?

Время на выполнение: 90- мин. (час.),
в том числе:
подготовка 10 мин.;
выполнение 1 час.10 мин.;
оформление и сдача 10 мин.

Работа выполняется в тетради для практических работ.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическая работа №8

Тема: Решение простейших задач на определение вероятности с использованием теоремы сложения вероятностей.

Цель: отработка навыков решения задач на вычисление вероятностей сложных событий с использованием формулы Бернулли, развитие логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

При выполнении практической работы студент должен

уметь:

- решать задачи на вычисление вероятностей сложных событий;

- решать задачи с использованием формулы Бернулли

знать:

определения суммы событий, произведения событий;

- формулировки и формулы теорем сложения и умножения вероятностей.

-понятие и виды событий;

-понятие вероятности;

-схему Бернулли;

Формируемые компетенции:

ОК 4. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

ОК5.Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК2. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для решения задач профессиональной деятельности;

Порядок выполнения работы:

1.Повторить теоретический материал по теме « Сложение вероятностей».

2.Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

3. Ответить на контрольные вопросы.

4. Выполнить самостоятельную работу**.**

5. Сдать отчет по проделанной работе.

Краткие теоретические сведения

Классическое определение вероятности

Раздел математики, изучающий закономерности случайных событий, называется теорией вероятностей.

Вероятностью P(A) события A в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов m, благоприятствующих событию A, к числуn всех исходов испытания.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример 1: В партии из 30 миксеров 2 бракованных. Найти вероятность купить исправный миксер.

$$n = 30, m = 30 - 2 = 28$$

$$P = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

Аксиомы вероятностей:

Каждому событию A поставлено в соответствие неотрицательное число P(A), называемое вероятностью события A.

Если события A_1, A_2 … попарно несовместны, то $P(A_1+A_2+\ldots)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots$

Свойства вероятностей:

Вероятность невозможного события равна нулю P=0.

Вероятность достоверного события равна единице P=1.

Вероятность произвольного случайного события A заключается между 0 и 1: $0<P(A)<1$.

Пример 2: Из 34 экзаменационных билетов, пронумерованных с помощью чисел от 1 до 34, наудачу извлекается один. Какова вероятность, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем.

Решение: Найдем количество чисел от 1 до 34, кратных трем. Это числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33. Всего таких чисел 11. Таким образом, искомая вероятность $p = \frac{11}{34}$

События А и В называются совместными, если они могут одновременно произойти, и несовместными, если при осуществлении одного события не может произойти другое.

События А и В называются независимыми, если вероятность наступления одного события не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей слагаемых без вероятности произведения: P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)

Пример 3: Вероятность поражения одной мишени – 0,7, а другой – 0,8. Какова вероятность, что будет поражена хотя бы одна мишень, если по ним стреляют независимо друг от друга.

Решение: Т.к. события совместны, то $p = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 1,5 - 0,56 = 0,94$

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей слагаемых: P(A+B)=P(A)+P(B).

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Условная вероятность – вероятность одного события, при условии, что другое событие уже произошло.

Вероятность произведения событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: P(AB)=P(A)·P(A/B) или P(BA)=P(A)·P(B/A)

Вероятность произведения двух независимых событий А и В равна произведению вероятностей сомножителей: P(AB)=P(A)·P(B).

Пример 4: В двух коробках лежат ручки разного цвета. В первой коробке – 4 красных и 6 черных, во второй – 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок вынимают по одной ручки. Найти вероятность, что обе ручки красные.

Решение: Найдем вероятности вытащить красную ручку из каждой коробки

$n_1 = 10$

$m_1 = 4$

$p_1 = \frac{4}{10}$

$n_2 = 10$

$m_2 = 3$

$p_2 = \frac{3}{10}$

Тогда вероятность того, что обе ручки красные: $p = p_1 \cdot p_2 = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{100} = 0{,}12$

Полная вероятность. Формула Байеса

Если событие А может произойти только при выполнении одного из событий H_1, H_2, …, которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события А вычисляется по формуле

$$p(A) = p(H_1) \cdot p(A/H_1) + p(H_2) \cdot p(A/H_2) + p(H_3) \cdot p(A/H_3) + \ldots$$

Эта формула называется формулой полной вероятности.

Если выполняются все условия, имеющие место для формулы полной вероятности, и $p(A) \neq 0$, то выполняется равенство, называемое формулой Байеса:

$$p(H_i / A) = \frac{p(H_i) \cdot p(A/H_i)}{p(A)}$$

Пример 1: В первой партии 20 ламп, во второй – 30 ламп и в третьей – 50 ламп. Вероятности того, что проработает заданное время, равна для первой партии 0,7, для второй – 0,8 и для третьей партии – 0,9. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампа проработает заданное время? Найти вероятность, что эта лампа принадлежит первой партии?

Решение: Пусть событие А – наудачу взятая лампа проработает заданное время.

Тогда, пусть H_1 – лампа из первой партии, H_2 – лампа из второй партии и H_3 – лампа из третьей партии. Тогда событие A/H_1 – лампа из первой партии проработает заданное время, A/H_2 – лампа из второй партии проработает заданное время и A/H_3 – лампа из третьей партии проработает заданное время. Найдем вероятности

Теперь, используя формулу Байеса найдем вероятность того, что эта лампа принадлежит первой партии

$$p(H_1 / A) = \frac{p(H_1) \cdot p(A/H_1)}{p(A)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}7}{0{,}83} \approx 0{,}169$$

Пример 2: Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 5 белых и 7 черных шаров, во второй – только белые и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар белый?

Решение: Пусть событие А – извлекается белый шар.

Тогда, пусть H_1 – шар из первой урны, H_2 – шар из второй урны и H_3 – шар из третьей урны. Тогда событие A/H_1 – белый шар из первой урны, A/H_2 – белый шар из второй урны и A/H_3 – белый шар из третьей урны. Найдем вероятности

$$p(\mathrm{H}_1)=\frac{1}{3}$$

$$p(\mathrm{H}_2)=\frac{1}{3}$$

$$p(\mathrm{H}_3)=\frac{1}{3}$$

$$p(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_1)=\frac{5}{12}$$

$$p(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_2)=1$$

$$p(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_3)=0$$

$$p(\mathrm{A})=\mathrm{p}(\mathrm{H}_1)\cdot\mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_1)+\mathrm{p}(\mathrm{H}_2)\cdot\mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_2)+\mathrm{p}(\mathrm{H}_3)\cdot\mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_3)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{12}+\frac{1}{3}\cdot1+\frac{1}{3}\cdot0=\frac{5}{36}+\frac{1}{3}=\frac{17}{36}$$

Формула Бернулли

1) Вероятность того, что событие А наступит ровно m раз при проведении n независимых испытаний, каждый из которых имеет ровно два исхода вычисляется по формуле Бернулли $P_n(\mathrm{m})=\mathrm{C}_n^m\, p^m(1-p)^{n-m}, m=0,1,2,...,n$

Пример 1: Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,2. Найти вероятность, что из 6 приобретенных билетов 2 окажутся выигрышными.

Решение:

$$p=0,2$$

$$n=6$$

$$m=2$$

$$P_n(\mathrm{m})=\mathrm{C}_n^m\, p^m(1-p)^{n-m}=\mathrm{C}_6^2\,0,2^2(1-0,2)^{6-2}=\frac{6!}{4!\cdot2!}\cdot0,04\cdot0,8^4\approx0,246$$

2) Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, равна $P_n(\mathrm{m}\geq1)=1-\mathrm{q}^n, q=1-p$

Пример 2: Прибор состоит из шести элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за определенное время равна 0,6. Для безотказной работы прибора необходимо, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность, что за данное время прибор будет работать безотказно?

Решение:

$p=0,6 \Rightarrow \quad q=0,4$

$n=6$

$m \geq 1$

$P_6(\mathrm{m} \geq 1)=1-0,4^6 \approx 0,9959$

3) Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, наступит не менее m_1 и не более m_2 раз вычисляется по формуле $P_n(\mathrm{m}_1 \leq \mathrm{m} \leq \mathrm{m}_2)=\sum_{m_1}^{m_2} P_n(\mathrm{m})$

Пример 3: Найти вероятность осуществления от двух до четырех разговоров по телефону при наблюдении пяти независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,7.

Решение:

$p=0,7$

$n=5$

$2 \leq m \leq 4$

$P_5(2 \leq m \leq 4)=\mathrm{C}_5^2 \cdot 0,7^2(1-0,7)^{5-2}+\mathrm{C}_5^3 \cdot 0,7^3(1-0,7)^{5-3}+\mathrm{C}_5^4 \cdot 0,7^4(1-0,7)^{5-4} \approx 0,801$

4) Наивероятнейшее значение m_0 числа наступления события А при проведении n повторных независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, вычисляется по формуле

$np-q \leq m_0 \leq np+p$

$np-(1-p) \leq m_0 \leq np+p$

Пример 4: Магазин получил 50 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,05. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в партии.

Решение:

$p=0,05$

$n=50$

$m_0-?$

$q=1-p=1-0,05=0,95$

$50 \cdot 0,05-0,95 \leq m_0 \leq 50 \cdot 0,05+0,05$

$1,55 \leq m_0 \leq 2,55$

$m_0=2$

Задания для самостоятельного решения.

Вариант 1

1. В пирамиде 10 винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,85; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

2. В первой коробке содержится 25 радиоламп, из них 20 стандартных; во второй коробке – 15 ламп, из них 11 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую

3. Монету бросают 8 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет не менее двух раз.

4. В семье шесть детей. Найти вероятность того, что среди этих детей два мальчика. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

Вариант 2

1. В пирамиде 25 винтовок, 8 из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,9; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,65. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

2. В первой коробке содержится 35 радиоламп, из них 20 стандартных; во второй коробке – 25 ламп, из них 10 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартной.

3. Найти вероятность того, что событие А появится не менее трех раз в пяти испытаниях, если вероятность появления события А в одном испытании равна 0,4.

4. Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Какова вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут не менее трех?

Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте теорему умножения событий.
2. Сформулируйте теорему сложения событий.
3. Формула условной вероятности.
4. Формула полной вероятности.
5. Вероятности каких событий можно вычислять по формуле Бернулли?

6. Как записывается формула Бернулли?

Время на выполнение: 90- мин. (час.),
в том числе:
подготовка 10 мин.;
выполнение 1 час.10 мин.;
оформление и сдача 10 мин.

Работа выполняется в тетради для практических работ.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическая работа №9

Тема: Построить закон распределения дискретной случайной величины по заданному условию.

Цель: расширение и закрепление знаний о дискретных случайных величинах, закрепление умений решать задачи на вычисление вероятности дискретных случайных величин.

При выполнении практической работы студент должен

уметь:

решать простейшие задачи, используя элементы теории вероятности;

-находить функции распределения случайной величины

-строить закон распределения дискретной случайной величины по заданному условию.

Знать:

-понятие случайной величины;

-закон распределения случайной величины;

-характеристики случайной величины;

Формируемые компетенции:

ОК1**.** Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 4. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

ОК5. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить теоретический материал по теме «Случайная дискретная величина».
2. Рассмотреть примеры решения типовых заданий.
3. Ответить на контрольные вопросы.
4. Выполнить самостоятельную работу**.**
5. Сдать отчет по проделанной работе.

Краткие теоретические сведения

Числовые характеристики дискретной случайной величины.

Основными характеристиками ДСВ являются математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение.

Характеристикой среднего значения случайной величины служит математическое ожидание.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots + x_n \cdot p_n$$

Свойства математического ожидания:

10.Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

$$M(C) = C$$

11. Постоянный можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX) = CM(X)$$

12. Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \ldots \cdot M(X_n)$$

13. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)$$

(для разности аналогично)

Характеристиками рассеяния возможных значений случайной величины вокруг математического ожидания служат, в частности, дисперсия и среднее квадратичное отклонение.

Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Свойства дисперсии:

14. Дисперсия постоянной равна нулю:

$$D(C) = 0$$

15. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X)$$

16. Дисперсия суммы (разности) независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D(X_1 \pm X_2 \pm ... \pm X_n) = D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n)$$

17. $D(X+C) = D(X)$

Средним квадратичным отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Рассмотрим следующие задачи.

1. Математическое ожидание и дисперсия СВ Х соответственно равны 0,5 и 5. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $2X-3$.

Решение.

Согласно свойствам математического ожидания и дисперсии, получаем:

$$M(2X-3) = M(2X) + M(-3) = 2M(X) - 3 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 3 = 1 - 3 = -2$$

$$D(2X-3) = 4 \cdot D(X) = 4 \cdot 5 = 20$$

18. Случайные величины X и Y независимы, причем $D(X) = 3$ и $D(Y) = 5$. Найти $D(Z)$, если $Z = 4 \cdot X - 5 \cdot Y + 3$.

Решение.

На основании свойств дисперсии получаем:

$$D(Z) = D(4 \cdot X - 5 \cdot Y + 3) = 16 \cdot D(X) + 25 \cdot D(Y) = 16 \cdot 3 + 25 \cdot 5 = 48 + 125 = 173$$

19.Закон распределения ДСВ Х задан таблицей распределения

x_i	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	c

Найти: c, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P\{X<3\}$.

20.Так как $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$, т.е. $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+c=1$, следовательно

$c=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=\frac{24-3-6-8}{24}=\frac{7}{24}$

Т.о. закон распределения примет вид

x_i	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{24}$

$M(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot p_i = 1\cdot\frac{1}{8}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{7}{24}=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+1+\frac{7}{6}=\frac{3+12+24+28}{24}=\frac{67}{24};$

2) Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой:

$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$

Сначала найдем математическое ожидание ДСВ X^2 для этого составим закон распределения этой СВ. Напоминаю, что для этого необходимо каждое значение ДСВ Х возвести в квадрат, а вероятности оставляем прежними. При одинаковых значениях ДСВ вероятности складываем.

$M(X^2)=1\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{4}+9\cdot\frac{1}{3}+16\cdot\frac{7}{24}=\frac{1}{8}+1+3+\frac{14}{3}=\frac{3+96+112}{24}=\frac{211}{24};$

$D(X)=\frac{211}{24}-\left(\frac{67}{24}\right)^2=\frac{24\cdot 211-67^2}{24^2}=\frac{5064-4489}{576}=\frac{575}{576};$

3) Найдем среднее квадратичное отклонение:

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{575}{576}}=\frac{5\sqrt{23}}{24}$

4) $P\{X<3\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$

4. Функция распределения ДСВ Х имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 0{,}2, & 0<x\le 1,\\ 0{,}6, & 1<x\le 2\\ 0{,}9, & 2<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$$

Найти: $M(X)$, $M(X^2)$ $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решение.

Составляем закон распределения ДСВ X (т.е. выполняем операцию обратную той, которую мы делали в предыдущей статье)

x_i	0	1	2	3
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

$M(X)=0\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}1=0{,}4+0{,}6+0{,}3=1{,}3$

Составляем закон распределения ДСВ X^2

x_i^2	0	1	4	9
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

$M(X^2)=0\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}4+4\cdot 0{,}3+9\cdot 0{,}1=0{,}4+1{,}2+0{,}9=2{,}5$

$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=2{,}5-1{,}3^2=2{,}5-1{,}69=0{,}81$

$\sigma(X)=\sqrt{0{,}81}=0{,}9$

21. Независимые случайные величины X и Y заданы таблицами распределения вероятностей

x_i^2	10	20
p_i	0,2	0,8

y_i^2	30	40	50
p_i	0,5	0,3	0,2

Найти $D(X+Y)$ двумя способами:

1. Составив предварительно таблицу распределения СВ $Z=X+Y$;
2. Используя правило сложения дисперсий.

Решение.

Составим таблицу распределения ДСВ $Z=X+Y$.

Найдем $z_{ij}=x_i+y_j$

10+30=40	20+30=50
10+40=50	20+40=60
10+50=60	20+50=70

Т.о. значения ДСВ Z таковы: $z_1 = 40,\ z_2 = 50,\ z_3 = 60,\ z_4 = 70$

Найдем соответствующие им вероятности:

$p_1 = P\{Z = 40\} = P\{X = 10, Y = 30\} = 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}1$

$p_2 = P\{Z = 50\} = P\{X = 10, Y = 40\} + P\{X = 20, Y = 30\} = 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}06 +$

$p_3 = P\{Z = 60\} = P\{X = 10, Y = 50\} + P\{X = 20, Y = 40\} = 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}04 +$

$p_4 = P\{Z = 70\} = P\{X = 20, Y = 50\} = 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}16$

Получаем ряд распределения СВ Z

z_i^2	40	50	60	70
p_i	0,1	0,46	0,28	0,16

$$M(Z) = \sum_{i=1}^{4} z_i \cdot p_i = 40 \cdot 0{,}1 + 50 \cdot 0{,}46 + 60 \cdot 0{,}28 + 70 \cdot 0{,}16 = 4 + 23 + 16{,}8 + 11{,}2 = 55;$$

$$M(Z^2) = \sum_{i=1}^{4} z_i^2 \cdot p_i = 1600 \cdot 0{,}1 + 2500 \cdot 0{,}46 + 3600 \cdot 0{,}28 + 4900 \cdot 0{,}16 = 160 + 1150 + 1008 \cdot$$

$D(Z) = M(Z^2) - [M(Z)]^2 = 3102 - 3025 = 77$

22.Используя правило сложения дисперсий: $D(Z) = D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$

$M(X) = 10 \cdot 0{,}2 + 20 \cdot 0{,}8 = 2 + 16 = 18;$

$M(X^2) = 100 \cdot 0{,}2 + 400 \cdot 0{,}8 = 20 + 320 = 340;$

$M(Y) = 30 \cdot 0{,}5 + 40 \cdot 0{,}3 + 50 \cdot 0{,}2 = 15 + 12 + 10 = 37$

$M(Y^2) = 900 \cdot 0{,}5 + 1600 \cdot 0{,}3 + 2500 \cdot 0{,}2 = 450 + 480 + 500 = 1430$

$D(Y) = 1430 - 1369 = 61$

$D(Z) = 16 + 61 = 77$

Задания для самостоятельной работы.

Вариант 1

Задание 1. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель $p = 0{,}6$. Найти вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле.

Задание 2. Составить закон распределения случайной величины X. Найти числовые характеристики случайной величины x (x – выигрыш владельца одного лотерейного билета).

- В лотерее разыгрываются 90 билетов;
- 25 из них выигрывают по 60 рублей;
- 15 из них выигрывают по 90 рублей;
- 10 из них выигрывают по 100 рублей.

Задание 3. Возможные значения ДСВ таковы: $x_1 = 2, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 8.$ Известны вероятности первых двух возможных значений: $p_1 = 0{,}4, \quad p_2 = 0{,}15$. Написать закон распределения и построить многоугольник распределения.

Вариант 2

Задание 1. Стрелком производятся выстрелы по мишени до первого попадания. Вероятность попадания в каждом выстреле равна p=0,6. Построить ряд распределения количества произведенных выстрелов.

Задание 2. Составить закон распределения случайной величины X .

Для заданного закона распределения найти М(x), Д(x), δ(x).

П – порядковый номер учащегося по списку в журнале.

X_i	п – 10	п – 6	п – 2	п	п + 1	п + 3	п + 5	п + 8
p_i	0,17	0,03	0,16	0,07	0,12	0,4	0,04	0,01

Задание 3. Игральная кость брошена три раза. Написать закон распределения числа появлений шестерки. Построить многоугольник распределения.

Контрольные вопросы

1.Что называется случайной величиной? Что называется дискретной случайной величиной?

2. Что называется законом распределения дискретной случайной величины?

3. Какие числовые характеристики ДСВ вы знаете?

4. Какими свойствами обладают математическое ожидание и дисперсия?

Время на выполнение: 90- мин. (час.),
в том числе:
подготовка 10 мин.;
выполнение 1 час.10 мин.;
оформление и сдача 10 мин.

Работа выполняется в тетради для практических работ.
Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическая работа №10

Тема: Нахождение математического ожидания, дисперсии и среднего квадратичного отклонения дискретной случайной величины заданной законом распределения.

Цель: расширение и закрепление знаний о дискретных случайных величинах, закрепление умений нахождения характеристик случайной величины, величины заданной законом распределения.

При выполнении практической работы студент должен

уметь:

-находить характеристики ДСВ;

знать:

-характеристики ДСВ;

Формируемые компетенции:

ОК4. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

ОК5.Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

Порядок выполнения работы:

1.Повторить теоретический материал по теме «Характеристики ДСВ».

2.Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

3. Ответить на контрольные вопросы.

4. Выполнить самостоятельную работу**.**

5. Сдать отчет по проделанной работе.

Краткие теоретические сведения

Различают два вида случайных величин: дискретные и непрерывные. **Определение**: Случайной называется величина, которая в результате испытания принимает только одно значение из возможного множества своих значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин. **Определение:** Случайная величина X называется ***дискретной*** (прерывной), если множество ее значений конечное или бесконечное, но счетное. Другими словами, возможные значения дискретной случайной величину можно перенумеровать.
Описать случайную величину можно с помощью ее закона распределения. **Определение**: ***Законом распределения дискретной случайной величины*** называют соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями.

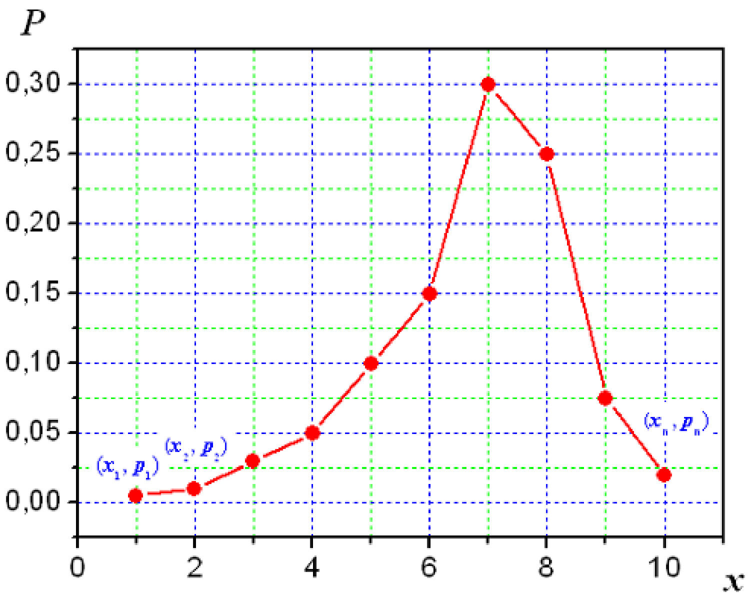
Закон распределения дискретной случайной величины X может быть задан в виде таблицы, в первой строке которой указаны в порядке возрастания все возможные значения случайной величины, а во второй строке соответствующие вероятности этих значений, т.е.

x	
p	

где $p_1+ p_2+\ldots+ p_n=1$

Такая таблица называется рядом распределения дискретной случайной величины.

Если множество возможных значений случайной величины бесконечно, то ряд $p_1+ p_2+\ldots+ p_n+\ldots$ сходится и его сумма равна 1. Закон распределения дискретной случайной величины X можно изобразить графически, для чего в прямоугольной системе координат строят ломаную, соединяющую последовательно точки с координатами $(x_i;p_i)$, $i=1,2,\ldots n$. Полученную линию называют ***многоугольником распределения:***



Закон распределения дискретной случайной величины X может быть также задан аналитически (в виде формулы):

$P(X=x_i)=\varphi(x_i), i =1,2,3\ldots n$

Числовые характеристики дискретной случайной величины.

Основными характеристиками ДСВ являются математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение.

Характеристикой среднего значения случайной величины служит математическое ожидание.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots + x_n \cdot p_n$$

Свойства математического ожидания:

23. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

$$M(C) = C$$

24. Постоянный можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX) = CM(X)$$

25. Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \ldots \cdot M(X_n)$$

26. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)$$

(для разности аналогично)

Характеристиками рассеяния возможных значений случайной величины вокруг математического ожидания служат, в частности, дисперсия и среднее квадратичное отклонение.

Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$D(X) = M[X - M(X)]^2$

Дисперсию удобно вычислять по формуле:

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$

Свойства дисперсии:

27. Дисперсия постоянной равна нулю:

$D(C) = 0$

28. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат:

$D(CX) = C^2 D(X)$

29. Дисперсия суммы (разности) независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:

$D(X_1 \pm X_2 \pm ... \pm X_n) = D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n)$

30. $D(X + C) = D(X)$

Средним квадратичным отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии:

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

Рассмотрим следующие задачи.

1. Математическое ожидание и дисперсия СВ X соответственно равны 0,5 и 5. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $2X - 3$.

Решение.

Согласно свойствам математического ожидания и дисперсии, получаем:

$M(2X - 3) = M(2X) + M(-3) = 2M(X) - 3 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 3 = 1 - 3 = -2$

$D(2X-3)=4\cdot D(X)=4\cdot 5=20$

31. Случайные величины X и Y независимы, причем $D(X)=3$ и $D(Y)=5$. Найти $D(Z)$, если $Z=4\cdot X-5\cdot Y+3$.

Решение.

На основании свойств дисперсии получаем:

$D(Z)=D(4\cdot X-5\cdot Y+3)=16\cdot D(X)+25\cdot D(Y)=16\cdot 3+25\cdot 5=48+125=173$

32. Закон распределения ДСВ X задан таблицей распределения

x_i	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	c

Найти: c, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P\{X<3\}$.

33. Так как $\sum_{i=1}^{4} p_i=1$, т.е. $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+c=1$, следовательно

$c=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=\frac{24-3-6-8}{24}=\frac{7}{24}$

Т.о. закон распределения примет вид

x_i	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{24}$

$M(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i\cdot p_i=1\cdot\frac{1}{8}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{7}{24}=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+1+\frac{7}{6}=\frac{3+12+24+28}{24}=\frac{67}{24};$

2) Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой:

$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$

Сначала найдем математическое ожидание ДСВ X^2 для этого составим закон распределения этой СВ. Напоминаю, что для этого необходимо каждое значение ДСВ X возвести в квадрат, а вероятности оставляем прежними. При одинаковых значениях ДСВ вероятности складываем.

$$M(X^2)=1\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{4}+9\cdot\frac{1}{3}+16\cdot\frac{7}{24}=\frac{1}{8}+1+3+\frac{14}{3}=\frac{3+96+112}{24}=\frac{211}{24};$$

$$D(X)=\frac{211}{24}-\left(\frac{67}{24}\right)^2=\frac{24\cdot211-67^2}{24^2}=\frac{5064-4489}{576}=\frac{575}{576};$$

3) Найдем среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{575}{576}}=\frac{5\sqrt{23}}{24}$$

4) $P\{X<3\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$

4. Функция распределения ДСВ X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le0\\ 0{,}2, & 0<x\le1,\\ 0{,}6, & 1<x\le2\\ 0{,}9, & 2<x\le3\\ 1, & x>3\end{cases}$$

Найти: $M(X)$, $M(X^2)$ $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решение.

Составляем закон распределения ДСВ X (т.е. выполняем операцию обратную той, которую мы делали в предыдущей статье)

x_i	0	1	2	3
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

$$M(X)=0\cdot0{,}2+1\cdot0{,}4+2\cdot0{,}3+3\cdot0{,}1=0{,}4+0{,}6+0{,}3=1{,}3$$

Составляем закон распределения ДСВ X^2

x_i^2	0	1	4	9
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

$$M(X^2)=0\cdot0{,}2+1\cdot0{,}4+4\cdot0{,}3+9\cdot0{,}1=0{,}4+1{,}2+0{,}9=2{,}5$$

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=2{,}5-1{,}3^2=2{,}5-1{,}69=0{,}81$$

$$\sigma(X)=\sqrt{0{,}81}=0{,}9$$

34.Независимые случайные величины X и Y заданы таблицами распределения вероятностей

x_i^2	10	20
p_i	0,2	0,8

y_i^2	30	40	50
p_i	0,5	0,3	0,2

Найти $D(X+Y)$ двумя способами:

1. Составив предварительно таблицу распределения СВ $Z=X+Y$;

2. Используя правило сложения дисперсий.

Решение.

Составим таблицу распределения ДСВ $Z=X+Y$.

Найдем $z_{ij}=x_i+y_j$

10+30=40	20+30=50
10+40=50	20+40=60
10+50=60	20+50=70

Т.о. значения ДСВ Z таковы: $z_1=40,\ z_2=50,\ z_3=60,\ z_4=70$

Найдем соответствующие им вероятности:

$p_1=P\{Z=40\}=P\{X=10,Y=30\}=0{,}2\cdot 0{,}5=0{,}1$

$p_2=P\{Z=50\}=P\{X=10,Y=40\}+P\{X=20,Y=30\}=0{,}2\cdot 0{,}3+0{,}8\cdot 0{,}5=0{,}06+$

$p_3=P\{Z=60\}=P\{X=10,Y=50\}+P\{X=20,Y=40\}=0{,}2\cdot 0{,}2+0{,}8\cdot 0{,}3=0{,}04+$

$p_4=P\{Z=70\}=P\{X=20,Y=50\}=0{,}8\cdot 0{,}2=0{,}16$

Получаем ряд распределения СВ Z

z_i^2	40	50	60	70
p_i	0,1	0,46	0,28	0,16

$$M(Z)=\sum_{i=1}^{4} z_i\cdot p_i=40\cdot 0{,}1+50\cdot 0{,}46+60\cdot 0{,}28+70\cdot 0{,}16=4+23+16{,}8+11{,}2=55;$$

$$M(Z^2)=\sum_{i=1}^{4} z_i^2\cdot p_i=1600\cdot 0{,}1+2500\cdot 0{,}46+3600\cdot 0{,}28+4900\cdot 0{,}16=160+1150+1008\cdot$$

$$D(Z)=M(Z^2)-[M(Z)]^2=3102-3025=77$$

35.Используя правило сложения дисперсий: $D(Z)=D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$$

$M(X) = 10 \cdot 0{,}2 + 20 \cdot 0{,}8 = 2 + 16 = 18;$

$M(X^2) = 100 \cdot 0{,}2 + 400 \cdot 0{,}8 = 20 + 320 = 340;$

$M(Y) = 30 \cdot 0{,}5 + 40 \cdot 0{,}3 + 50 \cdot 0{,}2 = 15 + 12 + 10 = 37$

$M(Y^2) = 900 \cdot 0{,}5 + 1600 \cdot 0{,}3 + 2500 \cdot 0{,}2 = 450 + 480 + 500 = 1430$

$D(Y) = 1430 - 1369 = 61$

$D(Z) = 16 + 61 = 77$

Задания для самостоятельной работы.

Вариант 1

№1.

В группе 20 студентов, среди них 14 юношей. Найти вероятность того, что среди наудачу выбранных 6-ти студентов будут 3 девушки и 3 юноши.

№2.

Имеются 4 коробки с шарами.

1-я: 4 синих и 5 красных;

2-я: 5 синих и 4 красных;

3-я: 7 красных;

4-я: 12 синих.

Наудачу берут шар. Он красный. Найти вероятность того, что он из 2-й коробки.

№3

Двум студентам предложена задача. Вероятность того, что её решит 1-й студент равна 0,72, что решит 2-й – 0,65. Найти вероятность того, что задачу решат оба студента; что решит только один?

№4

Случайная величина X задана законом распределения:

X_i	2	3	10
p_i	0,1	0,4	0,5

Найти математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднее квадратичное отклонение σ(X).

Вариант 2

№1

Имеются 23 детали и среди них 19 стандартные. Случайным образом выбирают сразу 6. Какова вероятность, что среди выбранных ровно 5 стандартных?

№2

В цехе продукция производится на 3-х станках:
1-й станок 45% всей продукции, из них брак 5%;
2-й станок 35% всей продукции, из них брак 10%;
3-й станок 20% всей продукции, из них брак 2%.
Найти вероятность, что наудачу взятая деталь из всех произведенных стандартная. Какова вероятность, что она была произведена на 1-м станке?
№3
Два стрелка независимо друг от друга производят выстрел по мишени. Вероятность попадания 1-м –
0,8, 2-м – 0,9. Какова вероятность, что после одного выстрела в мишени будет только одна пробоина?
№4
Случайная величина X задана законом распределения:

X_i	0,1	2	10	20
p_i	0,4	0,2	0,15	0,25

Найти математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднее квадратичное отклонение σ(X).

Контрольные вопросы.
1.Какаие характеристики случайной величины вы знаете?
2.Что такое математическое ожидание?
3. Что такое дисперсия?
4. Что такое среднеквадратичное отклонение?

Время на выполнение: 90- мин. (час.),
в том числе:
подготовка 10 мин.;
выполнение 1 час.10 мин.;
оформление и сдача 10 мин.

Работа выполняется в тетради для практических работ.
Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическая работа №11

Тема: Численное дифференцирование. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на интерполяционных формулах Ньютона.

Цель: рассмотреть интерполяционные формулами Ньютона, сформировать умение применять основные численные методы для решения прикладных задач, по табличным данным находить аналитическое выражение производной.

При выполнении практической работы студент должен

уметь:

-применять интерополяционные формулы Ньютона для решения прикладных задач;

знать:

-формулы и методы вычисления производной;

-методы численного дифференцирования;

Формируемые компетенции:

ОК1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК2. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для решения задач профессиональной деятельности;

ОК5.Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить теоретический материал по теме «Численное дифференцирование».
2. Рассмотреть примеры решения типовых заданий.
3. Ответить на контрольные вопросы.

4. Выполнить самостоятельную работу**.**

5. Сдать отчет по проделанной работе.

Краткие теоретические сведения

1.Вычисление производной по её определению.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет производную в этой точке, то есть существует предел отношения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю.

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (1)$$

Значение производной в точке x_0 можно получить, переходя к пределу в (1) по последовательности целых чисел n и полагая, например, $\Delta x = (\Delta x)_n = \frac{(\Delta x)_0}{\alpha^n}$. Здесь $(\Delta x)_0$ - некоторое начальное приращение аргумента, α - некоторое число, большее единицы, $n = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Тогда значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 запишется так:

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{(\Delta y)_n}{(\Delta x)_n}, (\Delta y)_n = f(x_0 + (\Delta x)_n) - f(x_0).$$

Отсюда получаем приближённое равенство

$$y'(x_0) \approx \frac{(\Delta y)_n}{(\Delta x)_n} \qquad (2).$$

Для функции $y = f(x)$, имеющей непрерывную производную до второго порядка включительно в окрестности точки x_0, точность приближения можно установить, воспользовавшись формулой Тейлора:

$$\left| y'(x_0) - \frac{(\Delta y)_n}{(\Delta x)_n} \right| \le \frac{L}{2}(\Delta x)_0 \alpha^{-n}, \; L = \max_{c \in [x_0; x]} |f''(c)|.$$

Для достижения заданной точности ε приближения производной можно при определённом (конечном) числе вычислений использовать неравенство:

$$\left| \frac{(\Delta y)_n}{(\Delta x)_n} - \frac{(\Delta y)_{n-1}}{(\Delta x)_{n-1}} \right| < \varepsilon \qquad (3).$$

__**Пример 1.**__ Вычислить производную функции $y = \sin x$ в точке $x_0 = \pi / 3$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ $(\pi / 3) \approx 1{,}047198$.

Решение. Положим $(\Delta x)_0 = 0{,}1;\ \alpha = 10;\ (\Delta x)_n = 0{,}1\cdot 10^{-n}$, откуда:

$$(\Delta y)_n = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 0{,}1\cdot 10^{-n}\right) - \sin\frac{\pi}{3}.$$

Определим приближённое значение производной:

$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx \frac{(\Delta y)_n}{(\Delta x)_n} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + 0{,}1\cdot 10^{-n}\right) - \sin\frac{\pi}{3}}{0{,}1\cdot 10^{-n}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Найдём отношения, аппроксимирующие производную:

$$\frac{(\Delta y)_0}{(\Delta x)_0} = 0{,}45590189,\ \frac{(\Delta y)_1}{(\Delta x)_1} = 0{,}49566158,\ \frac{(\Delta y)_2}{(\Delta x)_2} = 0{,}49956690,\ \frac{(\Delta y)_3}{(\Delta x)_3} = 0{,}49995670.$$

Заметим, что $\left|\frac{(\Delta y)_3}{(\Delta x)_3} - \frac{(\Delta y)_2}{(\Delta x)_2}\right| = 0{,}00038979390 < \varepsilon$. Таким образом, начиная с третьего приближения, в соответствии с оценкой (3), получаем искомое приближение производной данной функции с точностью не меньшей заданной. Точное значение $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = 0{,}5$.

2. Конечно-разностные аппроксимации.

Пусть отрезок $[a; b]$ разбит на n равных частей точками $\{x_i\}: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

Разность расстояний между соседними значениями аргумента постоянна, то есть шаг $h = x_i - x_{i-1}\ (i = 1, 2, \ldots, n)$. Далее, пусть на отрезке $[a; b]$ определена функция $y = f(x)$, значения которой в точках x_i равны $y_i = f(x_i)$.

Запишем выражения для первой производной данной функции в точке x_i с помощью отношения конечных разностей следующих типов:

а) аппроксимация с помощью *разностей вперёд* (правых разностей)

$$y'(x_i) \approx \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i},\ \Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h,\ \Delta y_i = y_{i+1} - y_i,\ y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}\ (i = 0, 1, \ldots, n-1) \quad (4);$$

б) аппроксимация с помощью *разностей назад* (левых разностей)

$$y'(x_i) \approx \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i},\ \Delta x_i = x_{i-1} - x_i = -h,\ \Delta y_i = y_{i-1} - y_i,\ y'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\ (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (5);$$

в) аппроксимация с помощью *центральных разностей* (точка x_i является центром системы точек x_{i-1}, x_i, x_{i+1}):

$$y'(x_i) \approx \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i},\ \Delta x_i = x_{i+1} - x_{i-1} = 2h,\ \Delta y_i = y_{i+1} - y_{i-1},\ y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\ (i = 1, 2, \ldots, n-1) \quad (6).$$

Очевидно, что аппроксимация производной с помощью центральных разностей представляет собой среднее арифметическое отношений (4) и (5) в точках $\{x_i\}, i = 1, 2, ..., n-1$. Отметим, что соотношения (4) и (6) не позволяют вычислить значение производной в правом конце отрезка *a*, а соотношения (5) и (6) – в левом конце отрезка b.

Можно показать, что для функции $y = f(x)$, имеющей непрерывную производную до второго порядка включительно, погрешность аппроксимации производных разностями вперёд и назад имеет один и тот же порядок $\theta(h)$, а погрешность аппроксимации центральными разностями для функции, имеющей непрерывную производную до третьего порядка включительно, имеет порядок $\theta(h^2)$.

Приближённое значение производной второго порядка в точке x_i выразим через значения функции y_{i-1}, y_i, y_{i+1}. Для этого представим вторую производную с помощью правой разности:

$$y''(x_i) \approx \frac{\Delta y_i'}{\Delta x_i},\ \Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h,\ \Delta y_i' = y_{i+1}' - y_i',$$

а производные первого порядка y_{i+1}' и y_i' - с помощью левых разностей:

$$y_{i+1}' = y'(x_{i+1}) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h},\ y_i' = y'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$$

и окончательно получим:

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \quad (7).$$

Погрешность последней аппроксимации имеет порядок $\theta(h^2)$ для функции $y = f(x)$, имеющей непрерывную производную до четвёртого порядка включительно на отрезке $[a; b]$. Естественно, представление (7) позволяет вычислять значения производной с помощью конечных разностей.

3.Постановка задачи аппроксимации функций

В вычислительной математике нередки случаи, когда одну функцию приходится заменять другой, более другой и удобной для дальнейшей работы. Такую задачу называют ***аппроксимацией*** функций.

Поводом для аппроксимации функции может послужить, в частности, табличный способ её задания. Предположим, что результате некоторого эксперимента для конечного набора значений x_i величины *x* из отрезка [a;b]:

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_j < \ldots < x_n = b$

получен набор значений y_i величины *y* (таблица 3.1).

таблица 3.1

x	x_0	x_1	…	x_i	…	x_n
F(x)	y_0	y_1	…	y_i	…	y_n

Допустим, существует функциональная зависимость *y=F(x).*

Необходимо задать *F(x)* аналитически.

Точки $x_0,\ldots, x_n$ называют *узлами аппроксимации*.

Классический подход к численному решению подобных задач заключается в том, чтобы, опираясь на информацию о функции *F*, по некоторому алгоритму подобрать аппроксимирующую функцию *G*, в определенном смысле «близкую» к *F*.

Чаще всего задача аппроксимации решается с помощью многочленов. Вычисления значений многочлена легко автоматизировать, производная и интеграл от многочлена, в свою очередь, также являются многочленами.

Для оценки «близости» функций выбирают тот или иной *критерий согласия*.

Для функций, заданных таблично, достаточно распространенным является *критерий Чебышева*, который определяет расстояние ρ между аппроксимируемой и аппроксимирующей функциями как максимум величины отклонения между этими функциями в узлах: $\rho = \max_i |F(x_i) - G(x_i)|$

(3.1)

Если ρ=0, т.е. $F(x_i) = G(x_i) = y_i$ (в узлах значения совпадают), то соответствующий способ аппроксимации называют ***интерполяцией***, а процедуру вычисления значений F(x) с помощью G(x) в точках, не являющихся узлами сетки, - ***интерполированием***.

Часто процедура аппроксимации связана с другим критерием согласия:

$$\rho = \min_i \sum_{i=0}^{n} \left(F(x_i) - G(x_i)\right)^2 .$$

Применяемый на его основе способ аппроксимации называется *методом наименьших квадратов.*

4.Существование и единственность интерполяционного многочлена

Пусть известны значения некоторой функции F(x):

x	x_0	x_1	...	x_i	...	x_n
$F(x)$	y_0	y_1	...	y_i	...	y_n

Будем решать задачу интерполирования этой функции с помощью построения интерполяционного многочлена n-ой степени.

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad \textbf{(3.2)}$$

который в узлах x_i принимает значения y_i

$$G(x_0) = y_0, \ldots, G(x_n) = y_n \qquad \textbf{(3.3)}$$

Условия интерполяции (3.3) приводят к системе из (n+1) линейных уравнений с (n+1) неизвестными – коэффициентами многочлена:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n. \end{cases} \qquad \textbf{(3.4)}$$

Решая эту с.л.у. относительно $a_0, a_1 \ldots, a_n$ получим аналитическое выражение многочлена (3.2).

Система (3.4) всегда будет иметь единственное решение, поскольку ее определитель не будет равен нулю. Отсюда и вытекает существование и единственность решения системы (3.4) и, следовательно, многочлена (3.2).

Интерполяция стандартно производится многочленами, степень которых на единицу меньше числа узлов.

5.Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть функция F(x) задана таблицей (3.1).

Построим многочлен *Ln(x),* степень которого не выше, чем n, и для которого выполнены условия интерполяции

$$Ln(x_0) = y_0, \quad Ln(x_1) = y_1, \quad ..., \quad Ln(x_n) = y_n \qquad \textbf{(3.5)}$$

Будем искать *Ln(x)* в виде

$$Ln(x) = l_0(x) + l_1(x) + ... + l_n(x) \qquad \textbf{(3.6),}$$

где $l_i(x)$ - многочлен степени n, причем

$$l_i(x_k) = \begin{cases} y_i, & если \ i = k; \\ 0, & если \ i \neq k. \end{cases} \qquad \textbf{(3.7).}$$

Очевидно, что требования (3.7) с учётом (3.6) вполне обеспечивает выполнение условий (3.5). Многочлен $l_i(x)$ составим следующим образом:

$$l_i(x) = C_i(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n) \qquad \textbf{(3.8)}$$

C_i - коэффициент, значение которого найдем из первой части условия (3.7):

$$C_i = \frac{y_i}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)..(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})..(x_i - x_n)}$$

Подставим C_i в (3.8) и далее с учётом (3.6) получим:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \frac{(x - x_0)..(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})..(x - x_n)}{(x_i - x_0)..(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})..(x_i - x_n)} \qquad \textbf{(3.9)}$$

Это и есть ***интерполяционный многочлен Лагранжа.***

По таблице исходной функции *F* формула (3.9) позволяет довольно просто составить «внешний вид» многочлена.

Пример: Построить интерполяционный многочлен для функции, заданной таблицей значений:

x	1	3	4
F(x)	12	4	6

Решение:

Из таблицы следует, что n=2 (на 1 меньше, чем узлов).

$x_0 = 1, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4$

$y_0 = 12, \ y_1 = 4, \ \ y_2 = 6$

По формуле (3.9) получаем:

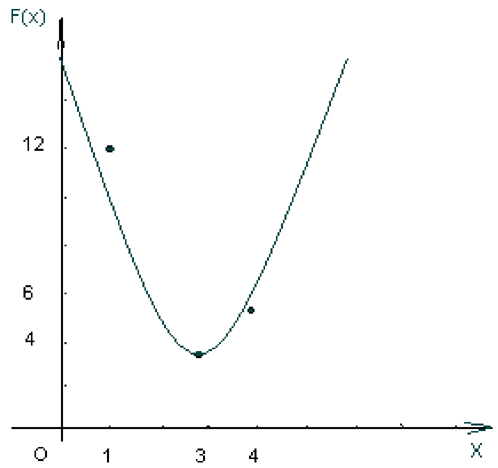
$$L_2(x) = 12\frac{(x-3)(x-4)}{(1-3)(1-4)} + 4\frac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)} + 6\frac{(x-1)(x-3)}{(4-1)(4-3)} =$$

$$= 12\frac{(x^2 - 7x + 12)}{-2(-3)} + 4\frac{(x^2 - 5x + 4)}{2(-1)} + 6\frac{(x^2 - 4x + 3)}{3 \cdot 1} =$$

$$= 2(x^2 - 7x + 12) - 2(x^2 - 5x + 4) + 2(x^2 - 4x + 3) = 2x^2 - 12x + 22.$$

Таким образом, интерполяционный многочлен для заданной функции имеет вид $L_2(x) = 2x^2 - 12x + 22.$

Построим график $L_2(x)$ и точки в одной координатной плоскости.



Функция $y = f(x)$ задана в равноотстоящих точках x_i ($i = 0,1,2...n$) отрезка $[a,b]$. Для нахождения производных на отрезке $[a,b]$ функцию $y = f(x)$ приближенно заменим интерполяционным полиномом Ньютона, построенным для системы узлов $x_0, x_1,...x_k$ $(k \le n)$ и получим первую интерполяционную формулу:

$$y(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + $$
$$+ \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + ... + \frac{t(t-1)...(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \text{, (1)}$$

где $\Delta^k y_0 = \Delta^{k-1} y_1 - \Delta^{k-1} y_0$ - конечная разность k-го порядка,

$$t = \frac{x - x_0}{h}, \quad h = x_{i+1} - x_i \quad (i = 0,1,...) \text{. (2)}$$

Перемножив биномы получим

$$y(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t^2 - t}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{t^3 - 3t^2 + 2t}{6}\Delta^3 y_0 + $$
$$+ \frac{t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t}{24}\Delta^4 y_0 + ... + \frac{t(t-1)...(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \quad (3)$$

Выражение (3) содержит в правой части функцию $t(x)=\frac{x-x_0}{h}$, поэтому производная имеет вид

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{h}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$y'(x)=\frac{1}{h}\cdot$$
$$\cdot\left[\Delta y_0+\frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{3t^2-6t+2}{6}\Delta^3 y_0+\frac{2t^3-9t^2+11t-3}{12}\Delta^4 y_0+..\right]$$

$$y''(x)=\frac{1}{h^2}\cdot\left[\Delta^2 y_0+(t-1)\Delta^3 y_0+\frac{6t^2-18t+11}{12}\Delta^4 y_0+..\right]$$

Аналогично можно вычислить производные функции $y=f(x)$ любого порядка.

Представляет интерес случай, когда нужно найти производные функции $y=f(x)$ в основных табличных точках x_i. Каждое табличное значение можно принять за начальное $x=x_0,\ \ t=0$, тогда производная в точке $x=x_0$ будет иметь вид

$$y'(x)=\frac{1}{h}\left[\Delta y_0-\frac{\Delta^2 y_0}{2}+\frac{\Delta^3 y_0}{6}-\frac{\Delta^4 y_0}{12}+\frac{\Delta^5 y_0}{5}+\ldots\right]$$

и

$$y''(x)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0+\frac{11}{12}\Delta^4 y_0-\frac{5}{6}\Delta^5 y_0+\ldots\right].$$

Если $P_k(x)$ - интерполяционный полином Ньютона, содержащий разности $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_0, \Delta^4 y_0, \ldots, \Delta^k y_0$, и соответствующая погрешность вычисляется по формуле $R_k(x)=y(x)-P_k(x)$, то погрешность в определении производной есть $R_k'(x) = y'(x) - P_k'(x)$.

Пример. Найти значение производной функции $y = arctg(\sqrt{x})$

в точке $x = 1,25$ с помощью численных методов.

Сформируем диагональную таблицу конечных разностей заданной функции

x_i	$\sqrt{x_i}$	$y_i = arctg(\sqrt{x_i})$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0,2000	0,4472	0,4205				
0,4000	0,6325	0,5639	0,1434			
0,6000	0,7746	0,6591	0,0951	-0,0483		
0,8000	0,8944	0,7297	0,0707	-0,0244	0,0238	
1,0000	1,0000	0,7854	0,0557	-0,0150	0,0094	-0,0144
1,2000	1,0954	0,8309	0,0455	-0,0102	0,0048	-0,0046
1,4000	1,1832	0,8691	0,0382	-0,0073	0,0028	-0,0020
1,6000	1,2649	0,9018	0,0327	-0,0055	0,0018	-0,0010
1,8000	1,3416	0,9303	0,0284	-0,0043	0,0012	-0,0006
2,0000	1,4142	0,9553	0,0250	-0,0034	0,0009	-0,0004
2,2000	1,4832	0,9776	0,0223	-0,0028	0,0006	-0,0002

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i .$$

Возьмем ближайшее к заданному значению $x = 1,25$ табличное значение $x_0 = 1,2000$, тогда $h = 0,2,\ q = 0,25$,

$$\Delta y_0 = 0,0382; \quad \frac{2q-1}{2} = -0,25; \quad \Delta^2 y_0 = -0,0055; \quad \frac{3q^2 - 6q + 2}{6} = 0,1$$

$$\Delta^3 y_0 = 0,0012; \quad \frac{2q^3 - 9q^2 + 11q - 3}{12} = -0,0651; \quad \Delta^4 y_0 = -0,0004;$$

$$\frac{6q^2 - 18q + 11}{12} = 0,5729.$$

$$y'(x) = \frac{1}{0,2} \cdot$$
$$\cdot \left[0,0382 + (-0,25) \cdot (-0,0055) + 0,1146 \cdot 0,0012 + (-0,0651) \cdot (-0,0004)\right]$$
$$= 0,1987$$

$$y''(x) = \frac{1}{0,2^2} \cdot \left[-0,0055 + (-0,75) \cdot 0,0012 + 0,5729 \cdot (-0,0004)\right] = -0,16$$

Найдем производную заданной функции аналитически и сравним полученные результаты.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1,25} \cdot (1+1,25)} = 0,1988$$

$$y'' = -\frac{1+3x}{4x\sqrt{x}(1+x)^2} = -\frac{1+3 \cdot 1,25}{4 \cdot 1,25 \cdot \sqrt{1,25} \cdot (1+1,25)^2} = -0,1678$$

Задания для самостоятельной работы.

Задание 1. По заданной таблице значений функции

x	x_0	x_1	x_2	x_3
y	y_0	y_1	y_2	y_3

составить формулу интерполяционного многочлена Лагранжа. Построить его график и отметить на нем узловые точки.

Задание 2. Вычислить с помощью калькулятора одно значение заданной функции для промежуточного значения аргумента с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа и оценить погрешность интерполяции.

Таблица 1

Вариант	x_0	x_1	x_2	x_3	y_0	y_1	y_2	y_3	x
1	-1	0	3	4	-3	5	2	-6	3,8
2	2	3	5	6	4	1	7	2	3,5

3	0	2	3	5	-1	-4	2	-8	0,5
4	7	9	13	15	2	-2	3	-4	4,8
5	-3	-1	3	5	7	-1	4	-6	4,1
6	1	2	4	7	-3	-7	2	8	3,9
7	-1	-1	2	4	4	9	1	6	3,3
8	2	4	5	7	9	-3	6	-2	4,0
9	-4	-2	0	3	2	8	5	10	2,9
10	-1	1,5	3	5	4	-7	1	-8	5,3
11	2	4	7	8	-1	-6	3	12	4,1
12	-9	-7	-4	-1	3	-3	4	-9	7,6
13	0	1	4	6	7	-1	8	2	4,4
14	-8	-5	0	2	9	-2	4	6	2,5
15	-7	-5	-4	-1	4	-4	5	10	5,2

Контрольные вопросы..

1.В каких случаях может потребоваться аппроксимация функции?

2.Какими критериями пользуются для определения «близости» функции?

3.Первая интерполяционная формула Ньютона?

Время на выполнение: 90- мин. (час.),
в том числе:
подготовка 10 мин.;
выполнение 1 час.10 мин.;
оформление и сдача 10 мин.

Работа выполняется в тетради для практических работ.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическая работа №12

Тема: Построение интегральной кривой. Метод Эйлера. Нахождение значения функции с использованием метода Эйлера.

Цель: формирование знаний нахождения значения функции с использованием метода Эйлера, умений находить значения функции, определяемые заданным дифференциальным уравнением и начальными условиями с использованием метода Эйлера

При выполнении практической работы студент должен

уметь:

- находить значение функции, определяемое заданным дифференциальным уравнением и начальными условиями использованием метода Эйлера.

Знать:

-- метод Эйлера для решения задачи Коши;

Формируемые компетенции:

ОК 4.Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

ОК5.Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить теоретический материал по теме «Численное дифференцирование и интегрирование».
2. Рассмотреть примеры решения типовых заданий.
3. Ответить на контрольные вопросы.
4. Выполнить самостоятельную работу**.**
5. Сдать отчет по проделанной работе.

Краткие теоретические сведения

Простейшим обыкновенным дифференциальным уравнением является уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной:

$$y' = f(x,y) \quad \textbf{(5.1)}$$

Эта задача известна, как **задача Коши**: *найти решение уравнения (5.1) в* *виде функции y(x), удовлетворяющей начальному условию*

$$y(x_{0)} = y_0. \quad \textbf{(5.2)}$$

Геометрически это означает, что требуется найти интегральную кривую y=y(x), проходящую через заданную точку M_0 (x_0,y_0), при выполнении равенства (5.1).

Существует несколько классов дифференциальных уравнений 1-го порядка, для которых решение может быть найдено аналитически. Но даже для таких уравнений решение не всегда удается довести до вида y=y(x). Многие же дифференциальные уравнения, к которым приводят математические модели реальных процессов, не могут быть решены аналитически. По этой причине разработаны многочисленные методы приближенного решения дифференциальных уравнений.

Эти методы подразделяются на 3 основные группы:

1) *аналитические методы*, применения которых дает приближенное решение дифференциальных уравнений в виде формулы;
2) *графические методы*, дающие приближенное решение в виде графика;
3) *численные методы*, когда искомая функция получается в виде таблицы.

Метод Эйлера

В основе метода ломанных Эйлера лежит идея графического построения решения дифференциального уравнения. Однако этот метод дает одновременно и способ нахождения искомой функции в численной (табличной) форме.

Пусть дано уравнение (5.1) с начальным условием (5.2), т.е. поставлена раздача Коши.

Вначале найдем простейшим способом приближенное значение решения в некоторой точке $x_1 = x_0 + h$, где h – достаточно малый шаг.

Заметим, что уравнение (5.1) совместно с начальным условием (5.2) задают направление касательной к искомой интегральной кривой в точке M_0 (x_0,y_0). Двигаясь вдоль этой касательной, получим приближенное значение решения в точке x_1:

$$y_1 = y_0 + hf\left(x_0; y_0\right) \qquad \textbf{(5.3)}$$

Аналогично, найдем приближенное значение решения в точке $x_2 = x_1 + h$, и т.д.

Продолжая эту идею, построим систему равностоящих точек $x_i = x_0 + ih$, i=0,..,n.

Получение таблицы значений искомой функции y(x) по методу Эйлера заключается в циклическом применении пары формул:

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= hf(x_i; y_i); \\ y_{i+1} &= y_i + \Delta y_i \end{aligned} \qquad \textbf{(5.4)}$$

Геометрическая иллюстрация метода Эйлера:

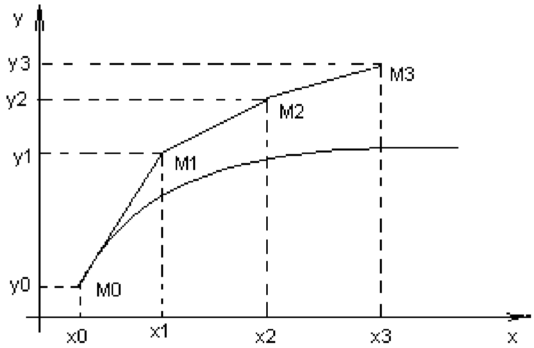


Рис 5.1 Построение ломаной Эйлера

Вместо кривой в реальности получается совокупность прямых – ломаная Эйлера.

Методы численного интегрирования дифференциальных уравнений, в которых решение получается от одного узла к другому, называются *пошаговыми*.

Метод Эйлера – простейший пошаговый метод.

Отметим, что оценка погрешности метода при таком элементарном рассмотрении невозможна даже на первом шаге. Кроме того, особенностью любого пошагового метода является то, что, начиная со второго шага, исходное значение y_i в формуле (5.4) само является приближенным, т.е. погрешность на каждом шаге систематически возрастает.

Наиболее используемым методом оценки точности, как метода Эйлера, так и других пошаговых методов приближенного численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений является *способ двойного прохождения заданного отрезка с шагом h и с шагом h/2*. Совпадение соответствующих <u>десятичных знаков</u> в полученных двумя способами результатах дает основание считать их верными.

Пример: Решить методом Эйлера дифференциальное уравнение $y' = \cos y + 3x$ с начальным условием y(0) = 1,3 на отрезке [0;1] применив h=0,2.

Решение: Имеем $f(x,y) = \cos y + 3x$.

Составим таблицу значений функции f(x,y) с шагом h и h/2.

X	y_i *(h=0.2)*	y_i *(h=0.1)*
0	1.3	1.3
0.1		1.33
0.2	1.35	1.38
0.3		1.46
0.4	1.52	1.56
0.5		1.68
0.6	1.77	1.82
0.7		1.98
0.8	2.09	2.15
0.9		2.33
1	2.47	2.53

При составлении таблицы проводились следующие вычисления:

Если h=0,2:

1) $x_0=0$, $y_0=1{,}3$ из начального условия;

2) $x_1=0{,}1$,

$\Delta y_0 = h(\cos y_0 + 3x_0) = 0.2(\cos 1.3 + 3\cdot 0) = 0.054;$

$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1.3 + 0.054 = 1.35$

3) $x_2=0{,}2$,

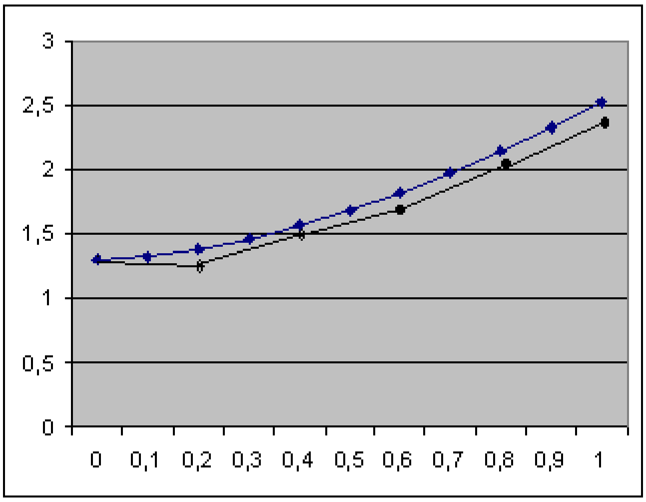
$\Delta y_1 = h(\cos y_1 + 3x_1) = 0.2(\cos 1.35 + 3\cdot 0,,2) = 0.16;$

$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1.35 + 0.16 = 1.52$

И т.д.

Аналогичные вычисления проводились и для h=0,1.

Таким образом, приближенное решение уравнения получаем в виде таблицы. Построим ломаную Эйлера для h=0,2 и h=0,1 в одной системе координат.



Задания для самостоятельной работы.

Задание 1.

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения y'=f(x,y) на отрезке [a;b] при заданном начальном условии $y(a)=y_0$ и шаге интегрирования h методом Эйлера:

а) с применением «ручных» вычислений с шагом 2h.

Б) с помощью программы для компьютера с шагом h.

В) Свести результаты вычислений в одну таблицу и сопоставить точность полученных значений функции. Пользуясь таблицей, сделать ручную прикидку графика интегральной кривой на бумаге.

Задание 2

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения y'=f(x,y) на отрезке [a;b] при заданном начальном условии $y(a)=y_0$ методом Рунге-Кутта с помощью программы для компьютера с шагом h и с шагом h/2.

На основе результатов двойного счета сделать вывод о точности полученного решения.

Задание 3

Найти точное решение задачи Коши.

Таблица 1

Вариант	*f(x)*	*a*	*b*	y_0	*h*
1	$(x^2+y^2)-2xyy'=0$	3	5	1	0.2
2	$y'=\frac{y}{x}-1$	2.6	4.6	1	0.2
3	$yy'+(x-2y)=0$	0	2	0	0.2

4	$(x-y)y-x^2y'=0$	1	3	1	0.2
5	$xy'-y=y^3$	0	2	0	0.2
6	$xyy'=1-x^2$	1	3	1	0.2
7	$yy'+x=1$	0.5	2.5	0	0.2
8	$y-xy'=1+x^2y'$	0.2	2.2	1	0.2
9	$xy+(x+1)y'=0$	1	3	2	0.2
10	$2x^2yy'+y^2=2$	3	5	1	0.2
11	$(xy-x^2)y'=y^2$	0.2	2.4	1	0.2
12	$y-xy'=x+yy'$	1	3	0	0.2
13	$y+2=(2x+y-4)y'$	2.6	4,6	2	0.2
14	$(3x-1)y'+y^2=0$	1.5	3,5	0	0.2
15	$xy'+2y=2xyy'$	2.1	4.1	0	0.2

Контрольные вопросы

1. Что является решением дифференциального уравнения?
2. На какие группы подразделяются приближенные методы решения дифференциальных уравнений?
3. В какой форме получается приближенное решение дифференциального уравнения по методу Эйлера?

Время на выполнение: 90- мин. (час.),
в том числе:
подготовка 10 мин.;
выполнение 1 час.10 мин.;
оформление и сдача 10 мин.

Работа выполняется в тетради для практических работ.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно

менее 70	2	неудовлетворительно

Литература.

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В.Богомолов, П.И.Самойленко. – М.: Юрайт, 2018. – 401 с.

2. Кацман Ю.Я. Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры с решениями: учебник. – М.: "Юрайт", 2017. – 130 с.

3.Григорьев В.П. Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования/ В.П.Григорьев, Т.Н. Сабурова. – 2-е изд., стер. – М.: ИЦ «Академия», 2018. – 368 с. – ISBN 978-5-4468-7178-0. – Текст: электронный // ЭБС «Академия»: [сайт].URL:https://academia-moscow.ru/reader/?id=345524

4. Математика (СПО): учебник / М.И. Башмаков. — Москва : КноРус, 2019. — 394 с. —Режим доступа: https://www.book.ru/book/929528

5. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике в 2-х ч. Ч.1.: учебное пособие для СПО. – М.: Юрайт, 2018. – 326 с. – (СПО)

6. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике в 2-х ч. Ч.2.: учебное пособие для СПО. – М.: Юрайт, 2018. – 251 с. – (СПО)

7. Алпатов, А. В. Математика: учебное пособие для СПО / А. В. Алпатов. — 2-е изд. — Саратов : Профобразование, Ай Пи Эр Медиа, 2019. — 162 c. — ISBN 978-5-4486-0403-4, 978-5-4488-0215-7. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/80328.html

8. Башмаков М.И. Математика: учебник для СПО/ М.И.Башмаков. – М.: ИЦ «Академия», 2013. – 256 с.

9. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В.Богомолов. – 7-е изд. –М.: «Дрофа», 2010. – 395 с.